22 Quantos números compreendidos entre 100 e 1.000 são formados por algarismos distintos, escolhidos entre 1, 2, 3, 4 e 5?

Resolução:
Esses números são todos de três algarismos, assim:

$A_{5;3} = \dfrac{5!}{2!} = 60 \text{ números.}$

Combinações

Seja A um conjunto de n elementos, isto é, $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$. Chamamos de combinações dos n elementos, tomados p a p, os subconjuntos de A constituídos de p elementos. Observe a ideia abaixo.

$$A = \{a, b, c, d\}$$

Combinações dos 4 elementos tomados dois a dois:

$\{a; b\}$ $\{a; c\}$ $\{a; d\}$ $\{b; c\}$
$\{b; d\}$ $\{c; d\} \Rightarrow 6$ elementos

Combinações dos 4 elementos tomados três a três.

$\{a; b; c\}$ $\{a; b; d\}$ $\{a; c; d\}$
$\{b; c; d\}$ $\Rightarrow 4$ elementos

De maneira geral, indicamos o número de combinações simples de n elementos tomados p a p $(n \geq p)$.

Assim:

$$C_{n;p} = \binom{n}{p} = \frac{A_{n;p}}{P_p} \therefore C_{n;p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exercícios resolvidos

23 Quantos times de futebol de salão podemos formar utilizando 8 pessoas?

Resolução:

$C_{8;5} = \dfrac{8!}{5!3!} = \dfrac{8.7.6.5!}{5!3.2.1} = 56 \text{ times}.$

24 Em uma assembleia há 57 homens e 31 mulheres. Quantas comissões de 8 pessoas podemos formar, sendo 5 mulheres e 3 homens?

Resolução:
Vamos formar as subcomissões:
Mulheres $C_{31;5} = 169.911$
Homens $C_{57;3} = 29.260$
No total, temos $C_{31;5} \cdot C_{57;3} = 4.971.595.860$ *comissões.*

25 Quantas diagonais tem um polígono regular?

Resolução:
O polígono tem n vértices $A_1, A_2, ..., A_n$
Cada segmento é determinado por um par não ordenado de dois vértices ($\overline{A_1A_4} \equiv \overline{A_4A_1}$*, por exemplo). Vamos combinar todos os pontos, dois a dois, e formar todos os segmentos possíveis, totalizando diagonais e lados também.*

Esse total de segmentos será de $\binom{n}{2}$.

Como existem n lados, temos:

$$d = \binom{n}{2} - n = \frac{n!}{2!(n-2)!} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n =$$

$$\frac{n^2 - n}{2} - n = \frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$$

26 Calcule o valor de p sabendo que $\dfrac{C_{8;p+2}}{C_{8;p+1}} = 2$.

Resolução:
Calculando separadamente, temos:

$$C_{8;p+2} \frac{8!}{(p+2)!(6-p)!} = \frac{8!}{(p+2).(p+1)!(6-p)!}$$

$$C_{8;p+1} \frac{8!}{(p+1)!(7-p)!} = \frac{8!}{(p+1)!(7-p)(6-p)!}$$

$$\frac{C_{8;p+2}}{C_{8;p+1}} = \frac{7-p}{p+2} = 2 \therefore 7 - p = 2p + 4 \therefore 3 = 3p \Rightarrow p = 1$$

Revisando

1 Determine $n \in \mathbb{N}$ na seguinte equação:
$(n!)^2 - 23.(n!) - 24 = 0.$

2 Simplifique a expressão:

$\dfrac{(n+2)!}{(n-1)!\,(n^2+n)}$ para $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 1$.

3 Dispondo dos algarismos 1, 2, 4, e 7, quantos números naturais de 4 algarismos, sem repetição, podemos formar?

4 Dispondo dos algarismos 1, 2, 4, e 7, quantos números naturais de 4 algarismos podemos formar?