Programa de Formação dos Professores Habilitados e dos Alunos de Licenciatura OBMEP na Escola e PIC 2016
Grupo N3 – Ciclo 4

Ciclo 4

- **1ª semana: quarto encontro de formação entre professores, alunos de licenciatura e coordenador**

- Assuntos a serem abordados:

Aritmética: Algoritmo do mdc de Euclides, Relação de Bézout e aplicações, equações diofantinas lineares
Contagem: Probabilidade condicional
Geometria: Construções geométricas elementares

- Material a ser estudado pelo professor:

Os textos e vídeoaulas que o coordenador deve abordar com os professores e que eles deverão estudar para se preparem para as aulas com seus alunos são:

Aritmética:

- Textos:
1. Seções 4.1 e 4.2 da Apostila do PIC da OBMEP "Encontros de Aritmética", F. Dutenhefner, L. Cadar.
http://www.obmep.org.br/docs/aritmetica.pdf
2. Seções 3.8 a 3.10 da Apostila 1 da OBMEP, "Iniciação à Aritmética", A. Hefez.
http://www.obmep.org.br/docs/apostila1.pdf

- Vídeoaulas do Portal da Matemática:
1) Tópicos Adicionais:
Módulo: "Algoritmo de Euclides Estendido, Relação de Bézout e Equações Diofantinas"
http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=55
- Vídeoaulas: "Algoritmo de Euclides revisitado", "Relação de Bézout e Aplicações", "O Algoritmo de Euclides estendido", "Equações diofantinas: Quando existe solução?", "Equações diofantinas: Como são as soluções?", "Equações diofantinas: alguns exemplos" e "Um macaco na escada".

Contagem:

- Texto:
1. Capítulos 5 e 6 da Apostila 2 do PIC da OBMEP "Métodos de Contagem e Probabilidade", Paulo Cezar Pinto Carvalho.
http://www.obmep.org.br/docs/apostila2.pdf

- Vídeoaulas do Portal da Matemática:

1) Tópicos Adicionais:
Módulo: “Métodos de Contagem e Probabilidade – PIC”
http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=69

- Vídeoaulas: “Aula 17 – Probabilidade condicional”, “Aula 18 – Probabilidade condicional”, “Aula 19 – Indepêndencia”.

2) 2º Ano do Ensino Médio:
Módulo: “Probabilidade Condicional”
http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=47

- Vídeoaulas: “Probabilidade condicional”, “Probabilidade condicional e Multiplicação de Probabilidades – Parte 1”, “Probabilidade condicional e Multiplicação de Probabilidades – Parte 2”, “Exercícios – Aula 1”, “Exercícios – Aula 2”, “Exercícios – Aula 3”, “Exercícios – Aula 4”, “Exercícios – Aula 5”, “Exercícios – Aula 6”, “Exercícios – Aula 7”, “Exercícios – Aula 8”.

Geometria:

- Texto:

1. Capítulo 1 da Apostila 8 do PIC da OBMEP “Uma Introdução às Construções Geométricas”, Eduardo Wagner.
http://www.obmep.org.br/docs/apostila8.pdf

- Vídeoaulas do Portal da Matemática:
1) Tópicos Adicionais:
Módulo: “Construções geométricas com régua e compasso”
http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=67

- Vídeoaulas:
  - Aula 1 - Construções geométricas elementares 1
  - Aula 2 - Construções geométricas elementares 2
  - Aula 6 - Divisão de um segmento

- **2ª semana: encontro entre professores e alunos**

- Assuntos a serem abordados: **Aritmética** – Algoritmo do mdc de Euclides, Relação de Bézout e aplicações, equações diofantinas lineares.

- Texto a ser estudado com os alunos: o professor deverá explicar aos alunos os conteúdos das seções 3.8 a 3. 10 da Apostila 1 da OBMEP, “Iniciação à Aritmética”, A. Hefez.
http://www.obmep.org.br/docs/apostila1.pdf

- Exercícios a serem discutidos com os alunos: o professor deverá discutir cerca de 8 problemas com os alunos. Esses problemas devem estar relacionados com os assuntos do presente encontro e podem ser selecionados do livro “Círculos Matemáticos: A Experiência Russa”, D. Fomin, S. Genkin, I. Itenberg; da Apostila 1 do PIC da OBMEP, “Iniciação à Aritmética”, A. Hefez; etc. Sugerimos os seguintes três problemas:

I. Calcule $\mathrm{mdc}(n+1, n^2+1)$, para n inteiro.
Solução: $\mathrm{mdc}(n+1, n^2+1) = \mathrm{mdc}\big(n+1, n^2+1-n\cdot(n+1)\big) = \mathrm{mdc}(n+1, -n+1) = \mathrm{mdc}\big(n+1, -n+1+1\cdot(n+1)\big) = \mathrm{mdc}(n+1, 2)$.
Assim, se n é par, então $n+1$ é ímpar e, logo, $\mathrm{mdc}(n+1, n^2+1) =$

$\mathrm{mdc}(n+1,2)=1$; e se n é ímpar, então $n+1$ é par e, logo, $\mathrm{mdc}(n+1,n^2+1)=\mathrm{mdc}(n+1,2)=2$.

II. Use o algoritmo do mdc de Euclides para calcular $\mathrm{mdc}(648,-1218)$ e encontre inteiros x e y tais que $\mathrm{mdc}(648,-1218)=648x+(-1218)y$.
Solução: Tem-se $\mathrm{mdc}(648,-1218)=\mathrm{mdc}(648,1218)$. Aplicando o algoritmo do mdc de Euclides, tem-se $1218=1\cdot 648+570$, $648=1\cdot 570+78$, $570=7\cdot 78+24$, $78=3\cdot 24+6$ e $24=4\cdot 6+0$. Logo, $\mathrm{mdc}(648,-1218)=6$. Realizando o processo de trás para frente, tem-se $6=78-3\cdot 24=78-3\cdot(570-7\cdot 78)=-3\cdot 570+22\cdot 78=-3\cdot 570+22\cdot(648-570)=22\cdot 648-25\cdot 570=22\cdot 648-25\cdot(1218-648)=648\cdot 47+(-1218)\cdot 25$. Logo, $x=47$ e $y=25$.

III. a) Encontre todos os inteiros múltiplos de 3 que divididos por 15 deixam resto igual a 8.
b) Encontre todos os inteiros pares que divididos por 15 deixam resto igual a 8.
Solução:

a) Seja n um inteiro múltiplo de 3 que dividido por 15 deixa resto 8. Então, existem inteiros x e y tais que $n=3x=15y+8$. Como $3x=15y+8$, obtém-se a equação diofantina $3x-15y=8$, que não tem solução porque $\mathrm{mdc}(3,-15)=3$ não divide 8. Assim, não existem inteiros múltiplos de 3 que divididos por 15 deixam resto igual a 8.
b) Seja n um inteiro par que dividido por 15 deixa resto 8. Então, existem inteiros x e y tais que $n=2x=15y+8$. Como $2x=15y+8$, obtém-se a equação diofantina $2x-15y=8$, que tem solução porque $\mathrm{mdc}(2,-15)=1$ divide 8. Como $2\cdot(-7)-15\cdot(-1)=1$, então $2\cdot(-7\cdot 8)-15\cdot(-1\cdot 8)=8$ e, portanto, $x_0=-7\cdot 8=-56$ e $y_0=-1\cdot 8=-8$ é uma solução particular da equação diofantina $2x-15y=8$. Assim, a solução geral da equação diofantina é dada por $x=-56-15t$ e $y=-8-2t$, com t variando no conjunto dos inteiros. Assim, $n=2x=2\cdot(-56-15t)=-112-30t$, com t variando no conjunto dos inteiros.

- **3ª semana: encontro entre Professores e alunos**

- Assuntos a serem abordados: **Contagem** – Probabilidade condicional.

- Texto a ser estudado com os alunos: o professor deverá explicar aos alunos o conteúdo do capítulo 5 da Apostila 2 do PIC da OBMEP “Métodos de Contagem e Probabilidade” de Paulo Cezar Pinto Carvalho.
http://www.obmep.org.br/docs/apostila2.pdf

- Exercícios a serem discutidos com os alunos: o professor deverá discutir cerca de 8 problemas com os alunos. Esses problemas devem estar relacionados com os assuntos do presente encontro e podem ser selecionados dos capítulos 5 e 6 da Apostila 2 do PIC da OBMEP “Métodos de Contagem e Probabilidade”, Paulo Cezar Pinto Carvalho; e das vídeoaulas. Sugerimos os seguintes três problemas:

I. Joga-se um dado não viciado duas vezes. Qual é a probabilidade condicional de se obter 3 na primeira jogada, sabendo que a soma dos resultados foi 7?
Solução:
Sejam A o evento “obteve-se 3 na primeira jogada” e B o evento “a soma dos resultados foi 7”. Deseja-se calcular $P(A|B)=P(A\cap B)/P(B)$. Como $B=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$, então $P(B)=6/6^2=1/6$. Como $A\cap B=\{(3,4)\}$, então $P(A\cap B)=1/6^2=1/36$. Como $P(B)=1/6$, $P(A\cap B)=1/36$ e $P(A|B)=P(A\cap B)/P(B)$, então $P(A|B)=(1/36)/(1/6)=1/6$.

II. Um saco contém 3 moedas, duas normais e uma com duas caras. Uma moeda é retirada do saco ao acaso e lançada 4 vezes, em sequência. Se saíram 4 caras, qual a probabilidade de a moeda retirada ser a de duas caras?
Solução:
Sejam A o evento “saem 4 caras” e B o evento “a moeda retirada tem duas caras”. A probabilidade pedida é $P(B|A)=P(A\cap B)/P(A)$. Tem-se $P(A\cap B)=P(A|B)\cdot P(B)=1\cdot(1/3)=1/3$. Como $A=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$, sendo $(A\cap B)\cap(A\cap\overline{B})=\phi$, então $P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})$. Tem-se $P(A\cap\overline{B})=P(A|\overline{B})\cdot P(\overline{B})=(1/16)\cdot(2/3)=1/24$. Como $P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})$, $P(A\cap B)=1/3$ e $P(A\cap\overline{B})=1/24$, então $P(A)=1/3+1/24=3/8$. Como $P(B|A)=P(A\cap B)/P(A)$, $P(A\cap B)=1/3$ e $P(A)=3/8$, então $P(B|A)=(1/3)/(3/8)=8/9$.

III. Há duas urnas numeradas e cada uma tem duas gavetas. A urna 1 contém uma moeda de ouro em uma gaveta e uma de prata na outra e a urna 2 contém uma moeda de ouro em cada gaveta. Uma urna é escolhida aleatoriamente (sem que se mostre seu número) e uma de suas gavetas é aberta ao acaso. Sabendo que nessa gaveta há uma moeda de ouro, qual é a probabilidade de que a urna seja a de número 2?
Solução:
Sejam A o evento “a moeda é de ouro” e B o evento “a urna é a de número 2”. Então, deseja-se calcular $P(B|A)=P(A\cap B)/P(A)$. Tem-se $P(A\cap B)=P(A|B)\cdot P(B)=1\cdot(1/2)=1/2$. Como $A=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$, sendo $(A\cap B)\cap(A\cap\overline{B})=\phi$, então $P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})$. Tem-se $P(A\cap\overline{B})=P(A|\overline{B})\cdot P(\overline{B})=(1/2)\cdot(1/2)=1/4$. Como $P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})$, $P(A\cap B)=1/2$ e $P(A\cap\overline{B})=1/4$, então $P(A)=1/2+1/4=3/4$. Como $P(B|A)=P(A\cap B)/P(A)$, $P(A\cap B)=1/2$ e $P(A)=3/4$, então $P(B|A)=(1/2)/(3/4)=2/3$.

- **4ª semana: encontro entre Professores e alunos**

- Assuntos a serem abordados: **Geometria** – Construções geométricas elementares.

- Texto a ser estudado com os alunos: o professor deverá explicar aos alunos os conteúdos do capítulo 1 da Apostila 8 do PIC da OBMEP, “Uma Introdução às Construções Geométricas”, Eduardo Wagner.
http://www.obmep.org.br/docs/apostila8.pdf

- Exercícios a serem discutidos com os alunos: o professor poderia começar com os dois problemas sobre paralelismo e perpendicularismo de retas, na página 4 da Apostila 8 do PIC da OBMEP, “Uma Introdução às Construções Geométricas”, Eduardo Wagner. Na sequência, sugerimos os seguintes problemas:

I. Problema 3, pág. 9, da Apostila 8 do PIC da OBMEP.
II. Problema 4, pág. 11, da Apostila 8 do PIC da OBMEP.
III. Problema 5, pág. 12, da Apostila 8 do PIC da OBMEP.
IV. Problema 6, pág. 14, da Apostila 8 do PIC da OBMEP.

As soluções dos problemas acima estão na apostila.

Para enriquecimento da aula outros problemas relacionados com os assuntos do presente encontro deverão ser discutidos.