Programa de Formação dos Professores Habilitados e dos Alunos de Licenciatura
OBMEP na Escola e PIC 2016
Grupo N3 – Ciclo 6

Ciclo 6

- **1ª semana: quarto encontro de formação entre professores, alunos de licenciatura e coordenador**

- Assuntos a serem abordados:

Aritmética: Aplicações de congruências, Aritmética Modular
Contagem: Combinações completas
Geometria: Construções geométricas de expressões algébricas

- Material a ser estudado pelo professor:

Os textos e vídeoaulas que o coordenador deve abordar com os professores e que eles deverão estudar para se preparem para as aulas com seus alunos são:

Aritmética:

- Texto:
1. Seções 4.5 e 4.6 da Apostila 1 da OBMEP, "Iniciação à Aritmética", A. Hefez. http://www.obmep.org.br/docs/apostila1.pdf

- Vídeoaulas do Portal da Matemática:
1) Tópicos Adicionais:
Módulo: "Aritmética dos Restos"
http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=63

- Vídeoaulas: "Tabelas de multiplicação da Aritmética Modular", "Existência de inverso mod n", "Unicidade da classe inversa", "Pode 10000 ser escrito como a soma de dois cubos perfeitos?", "Problemas com Congruências 1", "Problemas com Congruências 2", "Problemas com Congruências 3" e "Problemas com Congruências 4".

Contagem:

- Texto:
1. Capítulos 4 da Apostila 2 do PIC da OBMEP "Métodos de Contagem e Probabilidade", Paulo Cezar Pinto Carvalho, só o exemplo 5, páginas 35 e 36. http://www.obmep.org.br/docs/apostila2.pdf
2. Material Teórico do Portal da Matemática "Módulo de Métodos Sofisticados de Contagem – Combinações completas", Ângelo Papa Neto. http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/c7ulccajve8sc.pdf

- Vídeoaulas do Portal da Matemática:
2º Ano do Ensino Médio:

Módulo: "Métodos Sofisticados de Contagem"
http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=16

- Vídeoaulas: "Combinação Completa", "Exercícios sobre Combinação Completa – Parte 1", "Exercícios sobre Combinação Completa – Parte 2", "Exercícios sobre Combinação Completa – Parte 3", "Exercícios sobre Combinação Completa – Parte 4", "Exercícios sobre Combinação Completa – Parte 5".

Geometria:

- Texto:

1. Capítulo 3 da Apostila 8 do PIC da OBMEP "Uma Introdução às Construções Geométricas", Eduardo Wagner.
http://www.obmep.org.br/docs/apostila8.pdf

- Vídeoaulas do Portal da Matemática:
1) Tópicos Adicionais:
Módulo: "Construções geométricas com régua e compasso"
http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=67

- Vídeoaulas:
    - Aula 12- Quadrado inscrito em um triângulo
    - Aula 13 - Segmento medindo raiz de n
    - Aula 16 - Construções impossíveis com régua e compasso

- **2ª semana: encontro entre professores e alunos**

- Assuntos a serem abordados: **Aritmética** – Aplicações de congruências, Aritmética Modular.

- Texto a ser estudado com os alunos: o professor deverá explicar aos alunos os conteúdos das seções 4.5 e 4.6 da Apostila 1 da OBMEP, "Iniciação à Aritmética", A. Hefez.
http://www.obmep.org.br/docs/apostila1.pdf

- Exercícios a serem discutidos com os alunos: o professor deverá discutir cerca de 8 problemas com os alunos. Esses problemas devem estar relacionados com os assuntos do presente encontro e podem ser selecionados do livro "Círculos Matemáticos: A Experiência Russa", D. Fomin, S. Genkin, I. Itenberg; da Apostila 1 do PIC da OBMEP, "Iniciação à Aritmética", A. Hefez; etc. Sugerimos os seguintes três problemas:

I. Mostre que a equação $x^3 + 21y^2 + 5 = 0$ não tem soluções inteiras para x e y.
Solução: Suponha, por contradição, que existam x_0 e y_0 inteiros tais que $x_0^3 + 21y_0^2 + 5 = 0$. Então, $x_0^3 + 21y_0^2 + 5 = 0 \equiv 0 \pmod 7$ e, logo, como $21 \equiv 0 \pmod 7$ e $5 \equiv -2 \pmod 7$, tem-se $x_0^3 \equiv 2 \pmod 7$. Por outro lado, x_0 é côngruo a 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6, módulo 7, e, logo, $x_0^3 \equiv 0^3 = 0 \pmod 7$ ou $x_0^3 \equiv 1^3 = 1 \pmod 7$ ou $x_0^3 \equiv 2^3 = 8 \equiv 1 \pmod 7$ ou $x_0^3 \equiv 3^3 = 3^2 \cdot 3 = 9 \cdot 3 \equiv 2 \cdot 3 = 6 \pmod 7$ ou $x_0^3 \equiv 4^3 = 4^2 \cdot 4 = 16 \cdot 4 \equiv 2 \cdot 4 = 8 \equiv 1 \pmod 7$ ou $x_0^3 \equiv 5^3 = 5^2 \cdot 5 = 25 \cdot 5 \equiv 4 \cdot 5 = 20 \equiv 6 \pmod 7$ ou $x_0^3 \equiv 6^3 = 6^2 \cdot 6 = 36 \cdot 6 \equiv 1 \cdot 6 = 6 \pmod 7$, ou seja, x_0^3 é côngruo a 0, 1 ou 6, módulo 7, o que contradiz $x_0^3 \equiv 2 \pmod 7$.

II. a) Mostre que todo quadrado perfeito é côngruo a 0, 1 ou 4, módulo 8.
b) Mostre que não há nenhum quadrado perfeito na sequência: 2, 22, 222, 2222, 22222, ...
c) Mostre que não há nenhum quadrado perfeito na sequência: 3, 11, 19, ..., $3 + 8n$, ...

Solução:

a) Para resolver esse item, proceda de maneira análoga ao problema anterior quando foi mostrado que todo cubo perfeito é côngruo a 0, 1 ou 6, módulo 7.

b) Tem-se $2 \equiv 2 \pmod 8$, $22 \equiv 6 \pmod 8$, $222 = 200 + 22 \equiv 0 + 6 = 6 \pmod 8$, $2222 = 2 \cdot 1000 + 222 \equiv 2 \cdot 0 + 6 = 6 \pmod 8$, $22222 = 20 \cdot 1000 + 222 \equiv 20 \cdot 0 + 6 = 6 \pmod 8$,..., $222222 = 200 \cdot 1000 + 2222 \equiv 200 \cdot 0 + 6 = 6 \pmod 8$, e assim por diante. Assim, os números da sequência são côngruos a 2 ou 6, módulo 8, e, logo, pelo item a, não podem ser quadrados perfeitos.

c) Como $3 + 8n \equiv 3 \pmod 8$, para todo inteiro não negativo n, então os números da sequência são côngruos a 3, módulo 8, e, logo, pelo item a, não podem ser quadrados perfeitos.

III. Prove que, entre 52 inteiros quaisquer, existem dois cujos quadrados têm o mesmo resto na divisão por 100.

Solução: Todo número inteiro é côngruo, módulo 100, a exatamente um dos inteiros $0, 1, 2, \ldots, 99$. Assim, cada um dos 52 inteiros dados é côngruo, módulo 100, a exatamente um dos elementos de exatamente um dos 51 conjuntos: $\{0\}$, $\{50\}$, $\{1, 99\}$, $\{2, 98\}$, ..., $\{49, 51\}$. Pelo Princípio da Casa de Pombos (*se não conhecer esse Princípio, pesquise sobre ele; é bem simples!*), entre os 52 inteiros dados, existem dois deles, x e y ($x \neq y$), tais que:

- $x \equiv 0 \equiv y \pmod{100}$ ou
- $x \equiv 50 \equiv y \pmod{100}$ ou
- para algum i, com $i = 1, 2, \ldots, 49$, tem-se $x \equiv i \pmod{100}$ ou $x \equiv 100 - i \equiv -i \pmod{100}$, e $y \equiv i \pmod{100}$ ou $y \equiv 100 - i \equiv -i \pmod{100}$.

Em qualquer um dos casos acima, tem-se $x^2 \equiv y^2 \pmod{100}$ e, logo, x^2 e y^2 têm o mesmo resto na divisão por 100.

- **3ª semana: encontro entre Professores e alunos**

- Assuntos a serem abordados: **Contagem –** Combinações completas.

- Texto a ser estudado com os alunos: o professor deverá explicar aos alunos o conteúdo do Material Teórico do Portal da Matemática “Módulo de Métodos Sofisticados de Contagem – Combinações completas”, Ângelo Papa Neto.
http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/c7ulccajve8sc.pdf
O professor pode ler de forma reduzida o tópico no exemplo 5, do capítulo 4, da Apostila 2 do PIC da OBMEP “Métodos de Contagem e Probabilidade”, Paulo Cezar Pinto Carvalho. http://www.obmep.org.br/docs/apostila2.pdf

- Exercícios a serem discutidos com os alunos: o professor deverá discutir cerca de 8 problemas com os alunos. Esses problemas devem estar relacionados com os assuntos do presente encontro e podem ser selecionados do capítulo 4 (exercícios 15, 16, 17) da Apostila do PIC da OBMEP "Métodos de Contagem e Probabilidade", Paulo Cezar Pinto Carvalho; do "Módulo de Métodos Sofisticados de Contagem – Combinações completas" de Ângelo Papa Neto ou das vídeoaulas do módulo: "Métodos Sofisticados de Contagem". Sugerimos os seguintes três problemas:

I. Quantas são as soluções inteiras não negativas de $x + y + z + w = 6$.
Solução:
Este problema pode ser representado no esquema bola-traço. Devemos encontrar o número de formas de permutar 6 bolas e 3 traços. Isto pode ser feito de $CR_4^6 = \frac{9!}{6!\cdot 3!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{6} = 84$.

II. Quantas são os anagramas da palavra "PIRACICABA" que não possuem duas letras "A" adjacentes?
Solução:
Primeiro colocamos as letras "A" de um único modo: " __ A __ A __ A __". Agora devemos decidir quantas letras colocaremos em cada um dos quatro espaços. Devemos escolher x_1, x_2, x_3, x_4 ($x_i =$ nº de letras que colocaremos no i-ésimo espaço) inteiros não negativos tais que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$, com $x_2 \geq 1$ e $x_3 \geq 1$ (para não ter duas letras "A" adjacentes). Fazendo $x_2 = y_2 + 1$ e $x_3 = y_3 + 1$ obtemos a equação $x_1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 + x_4 = 7$, ou seja $x_1 + y_2 + y_3 + x_4 = 5$, onde x_1, y_2, y_3, x_4 são inteiros não negativos. Este problema pode ser representado no esquema bola-traço. Devemos encontrar o número de formas de permutar 5 bolas e 3 traços. Isto pode ser feito de $CR_4^5 = \frac{8!}{5!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{6} = 56$. Cada uma dessas soluções corresponde a uma configuração de número de letras entre as letras "A". Agora devemos permutar as letras "P,I,R,C,I,C,B" nos espaços, o que pode ser feito de $\frac{7!}{2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 1260$. Portanto, o número de anagramas procurado é $56 \cdot 1260 = 70\,560$.

III. De quantos modos podem ser pintados 9 objetos iguais usando 3 cores diferentes?
Solução:
Chamemos as cores pelos números 1, 2, 3. Seja x_i o número de objetos pintados usando a cor i. Dessa forma devemos achar o número de soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 9$. Novamente podemos representar este problema no esquema bola-traço. Devemos encontrar o número de formas de permutar 9 bolas e 2 traços. Isto pode ser feito de $CR_3^9 = \frac{11!}{9!\cdot 2!} = \frac{11\cdot 10}{2} = 55$.

- **4ª semana: encontro entre Professores e alunos**

- Assuntos a serem abordados: **Geometria** – Construções geométricas de expressões algébricas.

- Texto a ser estudado com os alunos: o professor deverá explicar aos alunos os conteúdos do capítulo 3 da Apostila 8 do PIC da OBMEP, "Uma Introdução às Construções Geométricas", Eduardo Wagner.
http://www.obmep.org.br/docs/apostila8.pdf

- <u>Exercícios a serem discutidos com os alunos</u>: o professor deverá discutir cerca de 8 problemas com os alunos. Esses problemas devem estar relacionados com os assuntos do presente encontro e podem ser selecionados da Apostila 8 do PIC da OBMEP, “Uma Introdução às Construções Geométricas”, Eduardo Wagner. Sugerimos os seguintes três problemas:

I. Dado o segmento a e o segmento unitário $u=1$, construa $x=\sqrt[4]{a}$.

Solução:

Se $y=\sqrt{a}$, então $x=\sqrt[4]{a}=\sqrt{\sqrt{a}}=\sqrt{y}$. Assim, x é a média geométrica de y e u, sendo que y é a média geométrica de a e u, onde u é um segmento unitário fixado. Assim, construímos sobre uma reta os segmentos $AH=u$ e $HB=a$, com H entre A e B. Traçando a mediatriz de AB encontramos o seu ponto médio O e traçamos uma semicircunferência de centro O e diâmetro AB. A perpendicular a AB passando por H determina o ponto C na semicircunferência. Como C é um ponto da semicircunferência e AB é diâmetro da mesma, então o triângulo ABC é retângulo com ângulo reto em C e, portanto, $CH^2=AH\cdot HB=1\cdot a=a$ e, logo, $CH=\sqrt{a}=y$. Sobre a reta contendo C e H construímos o segmento $CD=u$, com C entre D e H. Traçando a mediatriz de DH encontramos o seu ponto médio O' e traçamos uma semicircunferência de centro O' e diâmetro DH. A perpendicular a DH passando por C determina o ponto E na semicircunferência. Como E é um ponto da semicircunferência e DH é diâmetro da mesma, então o triângulo EDH é retângulo com ângulo reto em E e, portanto, $EC^2=CD\cdot CH=1\cdot y=y$ e, logo, $EC=\sqrt{y}=x$.

II. Considere um segmento de reta AB e um ponto C interior (mais próximo de B do que de A). Dizemos que AC é o *segmento áureo* de AB quando $CB/AC=AC/AB$.

a) Desenhe um segmento de reta AB qualquer e construa o seu segmento áureo.

b) Qual é o valor da razão AC/AB?

Solução:

a) Desenhamos um segmento de reta $AB=a$ qualquer. Se o segmento áureo de AB é $AC=x$, então $(a-x)/x=x/a$, isto é, $x^2+ax-a^2=0$ e, portanto, $x=\left(-a+\sqrt{a^2+4a^2}\right)/2=\sqrt{a^2+(a/2)^2}-a/2$. Traçando a mediatriz de AB, obtemos o ponto médio M de AB. Traçamos a perpendicular a AB passando por B e, nessa perpendicular, marcamos um ponto C tal que $BC=BM=a/2$. Como o triângulo ABC é retângulo com ângulo reto em B, então $AC^2=AB^2+BC^2=a^2+(a/2)^2$ e, portanto, $AC=\sqrt{a^2+(a/2)^2}$. Marcamos um ponto D em AC tal que $CD=BC=a/2$. Assim, $AD=AC-CD=\sqrt{a^2+(a/2)^2}-a/2=x$.

b) $AC/AB=x/a=\left(\left(-a+\sqrt{a^2+4a^2}\right)/2\right)/a=\left(\sqrt{5}-1\right)/2$.

III. Dados os segmentos de reta a, b, c e d (à sua escolha) construa

$$x = \frac{a^2 + bc}{d}.$$

Solução:

Se y é tal que $y^2 = bc$, ou seja, y é a média geométrica dos segmentos b e c, e $r = \sqrt{a^2 + y^2}$, então $x = r^2 / d$, isto é, $d/r = r/x$, ou seja, x é a terceira proporcional entre os segmentos d e r. Construímos sobre uma reta os segmentos $AH = b$ e $HB = c$, com H entre A e B. Traçando a mediatriz de AB encontramos seu ponto médio O e traçamos uma semicircunferência de centro O e diâmetro AB. A perpendicular a AB passando por H intersecta a semicircunferência no ponto P. Como o triângulo ABP é retângulo com ângulo reto em P, então $HP^2 = AH \cdot HB = bc = y^2$ e, portanto, $HP = y$. Traçamos a perpendicular a HP passando por P e, sobre essa perpendicular, construímos o segmento $PQ = a$. Como o triângulo HPQ é retângulo com ângulo reto em P, então $HQ^2 = PQ^2 + HP^2$ e, como $PQ = a$ e $HP = y$, segue que $HQ^2 = a^2 + y^2 = r^2$ e, portanto, $HQ = r$. Sobre um ângulo qualquer de vértice O' tomemos sobre um dos lados $O'A' = d$ e $A'C' = r = HQ$ e, sobre o outro lado, $O'B' = r = HQ$. Traçando por C' uma paralela à reta $A'B'$, determinamos D' na semirreta $O'B'$. Pelo Teorema de Tales, $O'A'/O'B' = A'C'/B'D'$, isto é, $d/r = r/B'D'$ e, como $d/r = r/x$, segue que $B'D' = x$.

O professor deverá salientar para o aluno que na solução de um problema de construção geométrica, além de ser descrita cada etapa da construção, é importante justificar por que ela é correta.