**/Aula 1 (2° encontro)**

**Solução da lista de aritmética**

**Solução exercício 1**

Para obter o maior número possível, devemos ter o maior número possível de algarismos iguais a 5 à esquerda. Para isso podemos tirar a sequencia inicial $1234$, deixando um 5, depois retirar a próxima sequencia $1234$.

$$1 2 3 4 5 1 2 3 4 5 1 2 3 4 5 1 2 3 4 5 1 2 3 4 5$$

É claro que se tivéssemos deixado um algarismo diferente de 5 à esquerda, o número seria menor. Entretanto, não podemos obter outro 5, já que só podemos retirar mais dois algarismos. Então, retiramos os dois próximos pequenos: 1 e 2.

Logo o resultado

 $5 5 3 4 5 1 2 3 4 5 1 2 3 4 5$

**Solução exercício 2**

 \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_

Números de algarismos: 10/ 9/ 8/ 7/ 6/ 5/ 4/ 3/ 2/ 1

Soma de algarismos: 40/ 39/ 39/ 39/ 39/ 36/ 27/ 18/ 9 /0

Como queremos o menor número possível, o primeiro algarismo será o 1.

Deste modo restará 9 casas decimais, então faremos 40/9.

4x9= 36 e 36+4=40

Temos de resto igual a 4, desse modo usaremos 0 algarismos nas próximas 4 casas decimais. Para descobrir a 5° casa decimal, faremos 39/4=9 com resto igual a 3. Desse modo teremos na 5° casa decimal o algarismo 3 e nas próximas 4 casas decimais o algarismo 9. Portanto o menor número com 10 algarismos e soma igual a 40 é: 1 0 0 0 0 3 9 9 9 9

(É sugerido que assista no Hotel de Hilbert o vídeo 2 de aritmética do PIC).

**Solução exercício 3**

Temos duas casas decimais, onde usaremos os números de 0 a 9.

\_ \_

O menor n° de dois algarismos é 10.

O maior n° de dois algarismos é 99.

Os n° de dois algarismos são no valor exato de 90 números (de 10 a 99).

90x2=180 algarismos no total.

**Solução exercício 4**

\*Das páginas de 1 a 9, são utilizados 9 algarismos.

\*das páginas 10 até 99, são utilizados 90 números com 2 algarismos, totalizando 2x90=180 algarismos.

\*Para numerar as páginas de 100 a 300 são necessários 201 números de três algarismos cada, totalizando 3x201=603 algarismos.

Portanto para numerar um livro de 300 páginas, são necessários 9+180+603=792 algarismos.

**Solução exercício 5**

Existem varias maneiras de contar a quantidade de números do conjunto dado. Em uma delas, o aluno pode observar que existem 75 números no conjunto {1,2,...,75} e que existem 29 números em {1,2,...,29}. Fazendo a diferença, concluímos que existem 75-29=46 números no conjunto {30,31,...,75}.

**Solução exercício 6**

1. **1260**

$$1260=1×1000+2×100+6×10+0$$

Observe que

* É divisível por 2;

Temos que $1000=2×500$, $100=2×50$, $10=2×5$, então

$$1260=1×2×500+2×2×50+6×2×5+0=2\left(500+2×50+6×5\right)=2\left(500+100+30\right)=2×630$$

* É divisível por 3;

Temos que $1000=3×333+1$, $100=3×33+1$, $10=3×3+1$, então

$$1260=1×\left(3×333+1\right)+2×\left(3×33+1\right)+6×\left(3×3+1\right)=3\left(333+2×33+6×3\right)+\left(1+2+6\right)=3\left(333+66+18\right)+(3×3)=3×(417+3)$$

* É divisível por 4;

Temos que $1000=4×250$, $100=4×25$, então

$$1260=1×4×250+2×4×25+60=4\left(250+2×25\right)+60$$

Como $4\left(250+2×25\right)$ é divisível por 4, é suficiente analisar o número 60

$$60=4×15$$

E portanto$ 1260=4\left(250+2×25\right)+4×15=4(250+50+15)$

* É divisível por 5;

Temos que $1000=5×200$, $100=5×20$, $10=5×2$ então

$$1260=1×5×200+2×5×20+6×5×2=5\left(200+2×20+6×2\right)$$

* É divisível por 6;

Observe que $6=2×3$, logo um número é divisível por 6 se é divisível por 2 e por 3 ao mesmo tempo. E como já vimos $1260 $é divisível por 2 e por 3.

Portanto $1260$ é divisível por 6.

* É divisível por 9;

Temos que $1000=9×111+1$, $100=9×11+1$, $10=9×1+1$, então

$$1260=1×\left(9×111+1\right)+2×\left(9×11+1\right)+6×\left(9×1+1\right)=9\left(111+2×11+6×1\right)+\left(1+2+6\right)=9\left(111+22+6\right)+(9×1)=9×(139+1)$$

* É divisível por 10;

Temos que $1000=10×100$, $100=10×10$, então

$$1260=1×\left(10×100\right)+2×\left(10×10\right)+6×10=10\left(100+2×10+6\right)=10\left(100+20+6\right)$$

**b) 1746**

* É divisível por 2, pois é par;
* É divisível por 3, pois a soma de seus algarismos é um número divisível por 3;
* Não é divisível por 4, pois $46=4×11+2$, logo 46 não é divisível por 4;
* Não é divisível por 5, pois não termina em 0 ou 5;
* É divisível por 6, pois é divisível ao mesmo tempo por 2 e por 3;
* É divisível por 9, pois a soma de seus algarismos é divisível por 9;

Não é divisível por 10, pois não termina em 0.

**c) 2210505**

* Não é divisível por 2, pois não é par;
* É divisível por 3, pois a soma de seus algarismos é um número divisível por 3;
* Não é divisível por 4, pois $05=4×1+1$, logo 05 não é divisível por 4;
* É divisível por 5, pois termina em 5;
* Não é divisível por 6, pois não é divisível por 2;
* Não é divisível por 9, pois a soma de seus algarismos não é divisível por 9;
* Não é divisível por 10, pois não termina em 0.

 (É sugerido que acessem os vídeos do portal da matemática em critérios de divisibilidade caso tenham duvidas no exercício proposto).

**Solução exercício 7**

Como o número deve ser divisível por 9, a soma dos algarismos deve ser divisível por 9. por outro lado, como todos os algarismos são pares, a soma dos algarismos também é par.

* $9×0=0\left(par\right), \left\{9+0;8+1+7+2;6+3;5+4\right\}$=$\left\{par+ímpar\right\}$
* $9×1=9\left(ímpar\right)$
* $9×2=18\left(par\right), \left\{9+9\right\}=\left\{ímpar+ímpar\right\}$, observe que o menor múltiplo de 9 com a soma igual a 18 é 99, mas seus algarismos são ímpares. Isto implica que o número deve ter 3 algarismos, o primeiro algarismo deve ser no mínimo 2. Neste caso, a soma dos outros dois algarismos é igual a 16 e como são pares a única possibilidade é $8+8=16$.
* Assim, $2+8+8=18$

Portanto $288=9×32$ é o menor múltiplo de 9 com todos os algarismos pares.

**Solução exercício 8**

Para entendermos melhor começaremos com um exemplo numérico. Temos os algarismos 1, 2 e 3 e com eles podemos formar os números 12, 13, 21, 23, 31 e 32. A soma desses números é igual a 132, e a soma dos algarismos dados é igual a 1+2+3=6. Observe que o resultado enunciado no exercício é verdadeiro pois 22x6=132.

Agora vamos para o caso geral. Suponhamos que os algarismos escolhidos são *a, b* e *c.* Com esses algarismos formamos os seguintes números de 2 algarismos:

*ab=10a+b*

*ac=10a+c*

*ba=10b+a*

*bc=10b+c*

*ca=10c+a*

*cb=10c+b*

*ab+ac+ba+bc+ca+cb=22ª+22b+22c=22(a+b+c).*

**Solução exercício 9**

108 é múltiplo de 3 e de 9 pois:

108=3x36 e 108=9x12

111 é múltiplo de 3 mas não é múltiplo de 9 pois:

111=3x37 e não é múltiplo de 9 porque não existe um y natural tal que 111=9x y

225 é múltiplo de 3 e também de 9, pois:

225=3x75 e 225=9x25

328 não é múltiplo de 3 e nem de 9 pelo mesmo fato decorrente acima.

930 é múltiplo de 3 e não é múltiplo de 9 pois:

930=3x310 e não é múltiplo de 9 porque não existe um y natural tal que 930=9x y.

35 424 é múltiplo de 3 e também de 9 pois:

35 424=3x11808 e 35 424=9x3936

523 476 é múltiplo de 3 e também de 9 pois:

523 476=3x174492 e 523 476= 9x58164

**Solução 10**

Seja dado um número $n$ escrito no sistema decimal como

$$n=n\_{r}…n\_{1}n\_{0}=n\_{r}10^{r}+…+n\_{1}10+n\_{0}$$

Podemos então escrever

$$n=(n\_{r}10^{r-1}+…+n\_{1})10+n\_{0},$$

Onde $n\_{0}$ é o algarismo das unidades de $n.$

Se $n\_{0}=0, $temos

$$n=(n\_{r}10^{r-1}+…+n\_{1})10+0=(n\_{r}10^{r-1}+…+n\_{1})×5×2=2\left[5×(n\_{r}10^{r-1}+…+n\_{1})\right]=2m$$

Se $n\_{0}=2, $temos

$$n=(n\_{r}10^{r-1}+…+n\_{1})10+2=(n\_{r}10^{r-1}+…+n\_{1})×5×2+2=2\left[5×(n\_{r}10^{r-1}+…+n\_{1})+1\right]=2m$$

Se $n\_{0}=4, $temos

$$n=(n\_{r}10^{r-1}+…+n\_{1})10+4=(n\_{r}10^{r-1}+…+n\_{1})×5×2+(2×2)=2\left[5×(n\_{r}10^{r-1}+…+n\_{1})+2\right]=2m$$

Se $n\_{0}=6, $temos

$$n=(n\_{r}10^{r-1}+…+n\_{1})10+6=(n\_{r}10^{r-1}+…+n\_{1})×5×2+(2×3)=2\left[5×(n\_{r}10^{r-1}+…+n\_{1})+3\right]=2m$$

Se $n\_{0}=8, $temos

$$n=(n\_{r}10^{r-1}+…+n\_{1})10+8=(n\_{r}10^{r-1}+…+n\_{1})×5×2+(2×4)=2\left[5×(n\_{r}10^{r-1}+…+n\_{1})+4\right]=2m$$

Portanto para o algarismo das unidades igual a 0, 2, 4, 6 ou 8 podemos verificar que o número $n $é da forma 2m(par).

**Solução 11**

Os dois amigos nasceram no mesmo mês e ano, com uma diferença de 7 dias, de modo que um nasceu no dia *d/m/a* e o outro no dia (*d+7)/m/a.*

Com estas datas formamos os números $(d)(m)(a)$ e $\left(d+7\right)\left(m\right)(a)$.

Observe que

$$\left(d+7\right)\left(m\right)\left(a\right)=\left(d\right)\left(m\right)\left(a\right)+7 ×10^{k},$$

*Onde k é o número de algarismos de (m)(a).*

Observe que só podemos ter $k=3$, se o mês m tem um algarismo, ou $k=4$, se o mês tem dois algarismos.

***Exemplo:*** Seja d=10, m=11 e a=12, logo

$$\left(10+7\right)\left(11\right)\left(12\right)=\left(10\right)\left(11\right)\left(12\right)+7 ×10^{k}$$

$171112=101112+7 ×10^{4}$

Sabendo que um desses números é o sêxtuplo do outro temos:

$$\left(d+7\right)\left(m\right)\left(a\right)=6×\left(d\right)\left(m\right)\left(a\right)⇒$$

$$\left(d\right)\left(m\right)\left(a\right)+7 ×10^{k}=6×(d)(m)(a)⇒$$

$$7 ×10^{k}=6×\left(m\right)\left(a\right)-\left(d\right)\left(m\right)\left(a\right)⇒$$

$$7 ×10^{k}=5×\left(d\right)\left(m\right)\left(a\right)$$

***1ºCaso:*** k=3

$$\left(d\right)\left(m\right)\left(a\right)=\frac{7 ×10^{3}}{5}=1400$$

Isto é, d=1, m=4 e a=00, ou seja, 1º de Abril de 1900

***2ºCaso:*** k=4

$$\left(d\right)\left(m\right)\left(a\right)=\frac{7 ×10^{4}}{5}=14000,$$

que não é uma data válida, pois não existe o mês 0.

Portanto a data de nascimento do amigo mais velho é 1º de Abril de 1900

**Solução 12**

Observe que o número 72 é divisível por 8 e por 9, pois:

$$72=2^{3}. 3^{2}=8 . 9$$

Logo um número é divisível por 72 se for divisível por 8 e por 9.

Pelo critério da divisibilidade por 8, o número 17\* tem que ser divisível por 8.

Note que o único algarismo que funciona é o 6, pois

$$\frac{176}{8}=22$$

Pelo critério da divisibilidade por 9, a soma dos algarismos do número$ 32\*357176$ tem que ser divisível por 9, logo

$$3+2+ \*+3+5+7+1+7+6=34+ \*$$

Assim o algarismo que falta é 2

Portanto o número é $322357176$.