Teorema de Pitágoras

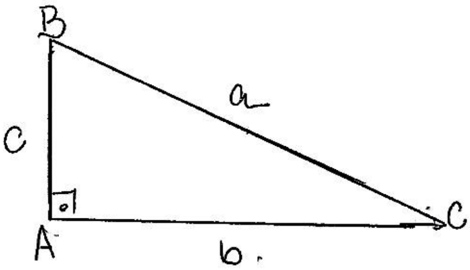
Seção 8.2

Seja um triângulo retângulo ABC com ângulo reto no vértice A. Definiremos os comprimentos dos lados deste triângulo sendo:

$a = \overline{BC}$

$b = \overline{AC}$

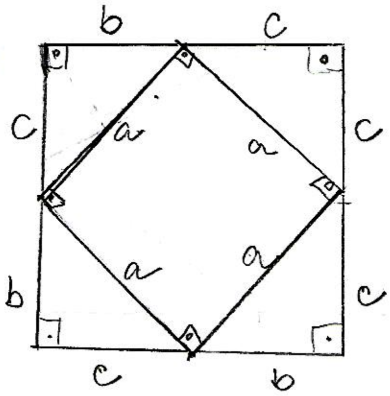
$c = \overline{AB}$



Catetos: lados AC e AB → chegam no vértice do ângulo reto.
Hipotenusa: lado BC que não passa pelo vértice do ângulo reto

Def. Teorema de Pitágoras: Se um Δ retângulo possui hipotenusa de medida a e catetos de medidas b e c, então $a^2=b^2+c^2$. Em palavras, o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos

Demonstração:



→ quadrado criado com 4 cópias do triângulo retângulo, sendo que os lados do quadrado é $(b+c)^2$

calcular a área por 2 maneiras:

1º) área do quadrado: $l^2 = (b+c)^2$

2º) Esse quadrado é a união de um quadrado de lado a com 4 Δ retângulos de catetos b e c $= 4 \cdot \frac{bc}{2} + a^2$

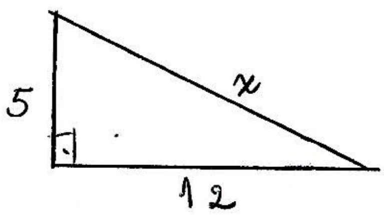
Obs: área Δ: $\frac{b \times h}{2} = \frac{b \times c}{2}$

Igualando as duas expressões temos que: $4 \cdot \frac{bc}{2} + a^2 = (b+c)^2$

$$= 2\cancel{bc} + a^2 = b^2 + \cancel{2bc} + c^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \blacksquare$$

Ex 1:



cat: 5 e 12

hip: x

$x^2 = 5^2 + 12^2$

$x^2 = 25 + 144$

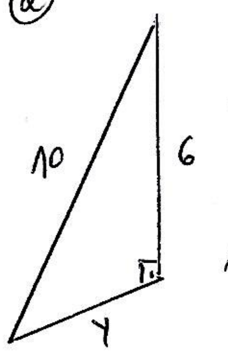
$x^2 = 169$

$x = \sqrt{169}$

$\rightarrow x = \pm 13$

$\boxed{x = 13}$

②



cat: y e 6

hip: 10

$10^2 = y^2 + 6^2$

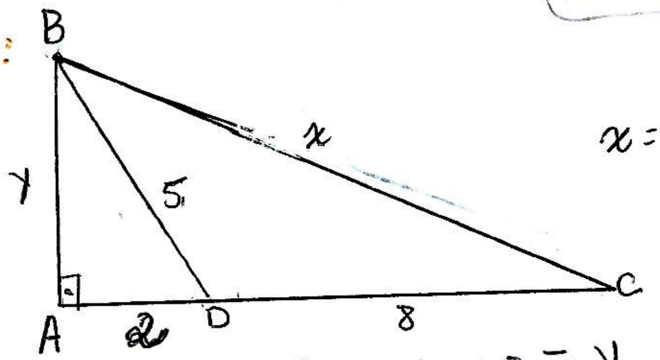
$10^2 - 6^2 = y^2$

$y^2 = 100 - 36$

$y^2 = 64$

$\boxed{y = \sqrt{64} = 8}$

Ex 2:



$x = ?$ ABC $\Rightarrow$ cat: $\overset{y}{AB}$ e $AC \rightarrow 2 + 8 = 10$

hip: $BC = x$

1°. descobrir quanto vale $AB \Rightarrow y$

$\triangle ABD \Rightarrow 5^2 = 2^2 + y^2$

$5^2 - 2^2 = y^2$

$y^2 = 25 - 4$

$y^2 = \sqrt{21}$

2°. descobrir quem é $x = BC =$ hip do $\triangle ABC$:

$y^2 + 10^2 = x^2$

$(\sqrt{21})^2 + 100 = x^2$

$x^2 = 100 + 21$

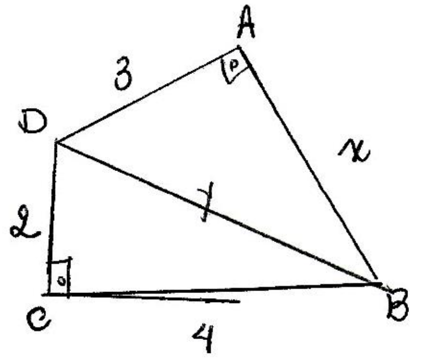
$x^2 = 121$

$x = \sqrt{121}$

$\boxed{x = 11}$

Exercícios:

1. Na figura a seguir, o quadrilátero ABCD possui dois ângulos retos. Determine o comprimento do lado AB. ③



$y^2 = x^2 + 3^2$

$(\sqrt{20})^2 = x^2 + 9$

$20 - 9 = x^2$

$x^2 = 11$

$\boxed{x = \sqrt{11}}$

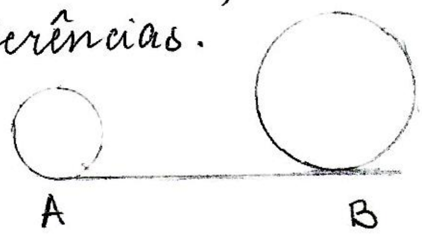
$y^2 = 2^2 + 4^2$

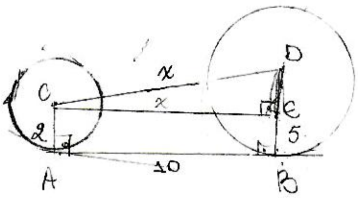
$y^2 = 4 + 16$

$y^2 = 20$

$y = \sqrt{20}$

2. Na figura a seguir, AB é um segmento tangente às circunferências de raios 2cm e 5cm. Se o comprimento do segmento AB é igual a 10cm, determine a distância entre os centros das circunferências.





$\overline{CD} = ? = x$

CE paralelo a $\overline{AB}$ ↳ 10

CA = 2cm

DB = 5cm

CE = 10cm

EB = CA = 2cm

DE = 3cm

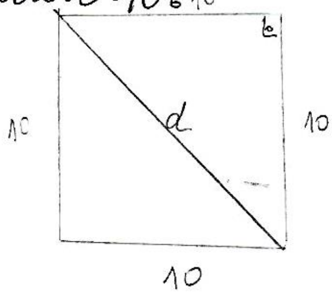
$x^2 = (\overline{DE})^2 + (CE)^2$

$x^2 = 3^2 + 10^2$

$x^2 = 9 + 100$

$\boxed{x = \sqrt{109}}$ //

3. calcule o comprimento da diagonal de um quadrado de lado 10.

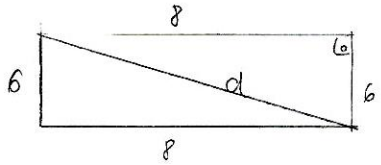


$d^2 = 10^2 + 10^2$

$d^2 = 100 + 100$

$d = \sqrt{200}$

4. calcule a diagonal (comprimento) de um retângulo 6 × 8.



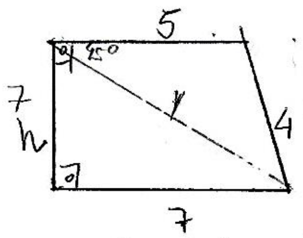
$d^2 = 8^2 + 6^2$

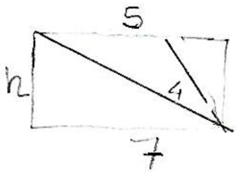
$d^2 = 64 + 36$

$d^2 = 100$

$\boxed{d = 10}$

6. determine a área do trapézio e altura da figura a seguir:





Área.

$= \frac{(B+b)h}{2}$

$= \frac{(7+5)\cdot 7}{2} = \frac{84}{2}$ $\boxed{42}$

$\cos 45° = \frac{7}{y}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{7}{y}$

$\sqrt{2}y = 14$

$y = \frac{14\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{y = 7\sqrt{2}}$

$(7\sqrt{2})^2 = h^2 + 7^2$

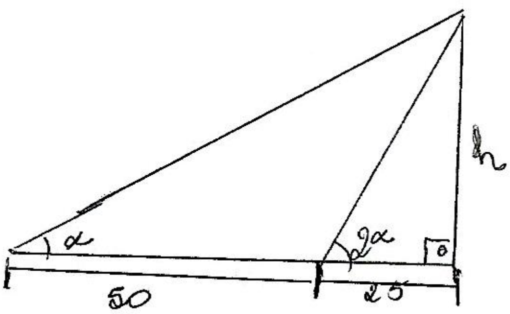
$49 \cdot 2 = h^2 + 49$

$98 - 49 = h^2$

$h^2 = 49$

$\boxed{h = 7}$

7. Uma pessoa a 25 m de um prédio vertical enxerga o topo do prédio segundo certo ângulo. Afastando-se do prédio perpendicularmente, essa pessoa caminha 50 m e passa a avistar o topo do prédio com a metade do ângulo anterior. Qual é a altura do prédio?



Termos pitágoricos

"Como encontrar triângulos retângulos cujos lados tenham medidas inteiras?"

Def: Sendo a, b, c inteiros positivos com $b < c < a$ dizemos que (b, c, a) é um termo pitagórico se $a^2 = b^2 + c^2$. Assim, $(3, 4, 5)$ e $(5, 12, 13)$ são exemplos de termo pitagóricos.

Obs: Um termo pitagorico (b, c, a) é chamado primitivo, quando b e c são primos entre si, ou seja, $mdc(b, c) = 1$.

- Normalmente, qualquer termo da forma $(3k, 4k, 5k)$ com $k \in \mathbb{Z}$ e $k > 1$, também é pitagorico, porém não é primitivo.

exemplo: $(3, 4, 5)$ é pitagorico primitivo.