1) Se a = 18 e b = 60 calcule os conjuntos D(a), D(b) e D(b − a) dos divisores de a, de b e de(b − a). Em seguida verifique que: D(a) ∩ D(b) = D(a) ∩ D(b − a).

Solução.

D(a) = D(18) = {1, 2, 3, 6, 9, 18}

D(b) = D(60) = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60}

D(b − a) = D(42) = {1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42}

Calculando os divisores comuns:

D(a) ∩ D(b) = {1, 2, 3, 6}

D(a) ∩ D(b − a) = {1, 2, 3, 6}

Portanto, D(a) ∩ D(b) = D(a) ∩ D(b − a).

2) Se a = 84 e b = 330. Calcule o resto r da divisão de b por a, calcule os conjuntos D(a), D(b) e D(r) dos divisores de a, de b e de r, e verifique que D(a) ∩ D(b) = D(a) ∩ D(r).

Solução.

Dividindo b por a obtemos:

330 = 3 · 84 + 78, de modo que r = 78 é o resto da divisão de b por a.

D(a) = {1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84}

D(b) = {1, 2, 3, 5, 6, 10, 11, 15, 22, 30, 33, 55, 66, 110, 165, 330}

D(r) = {1, 2, 3, 6, 13, 26, 39, 78}

Calculando os divisores comuns:

D(a) ∩ D(b) = {1, 2, 3, 6} = D(a) ∩ D(r)

Daí, como o conjunto dos divisores comuns de a e b é igual ao conjunto dos divisores comuns de a e r, tomando o maior dos elementos, concluímos que mdc(a, b) = mdc(a, r).

3) Calcule:

A) mdc(18, 60).

mdc(18, 60) = mdc(18, 60 − 18) = mdc(18, 42) = mdc(18, 42 − 18) = mdc(18, 24) = mdc(18, 24) = mdc(18, 24 − 18) = mdc(18, 6) = 6.

B) mdc(459, 595).

mdc(459, 595) = mdc(459, 595 − 459) = mdc(459, 136) = mdc(136, 459) = mdc(136, 459 − 136) = mdc(136, 323) = mdc(136, 323) = mdc(136, 323 − 136) = mdc(136, 187) = mdc(136, 187) = mdc(136, 187 − 136) = mdc(136, 51) = mdc(51, 136) = mdc(51, 136 − 51) = mdc(51, 85) = mdc(51, 85) = mdc(51, 85 − 51) = mdc(51, 34) = mdc(34, 51) = mdc(34, 51 − 34) = mdc(34, 17) = 17.

C) mdc(51834, 51835).

mdc(51834, 51835) = mdc(51834, 51835-51834) = mdc(51834, 1) = 1

D) mdc(162, 372).

Solução.

Dividindo 372 por 162, obtemos:

$372 = 2 \cdot 162 + 48$.

Assim mdc(162, 372) = mdc(162, 48).

Dividindo 162 por 48 obtemos $162 = 3 \cdot 48 + 18$.

Daí mdc(48, 162) = mdc(48, 18).

Dividindo 48 por 18 obtemos $48 = 2 \cdot 18 + 12$

e portanto mdc(18, 48) = mdc(18, 12).

Dividindo 18 por 12 obtemos $18 = 1 \cdot 12 + 6$ e assim mdc(12, 18) = mdc(12, 6).

Portanto mdc(162, 372) = mdc(6, 12) = 6.

E) mdc(339, 1407).

Solução.

Dividindo 1407 por 339 obtemos $1407 = 4 \cdot 339 + 51$. Assim mdc(339, 1407) = mdc(339, 51).

Agora dividimos 339 por 51, obtendo $339 = 6 \cdot 51 + 33$. Daí mdc(51, 339) = mdc(51, 33).

Dividindo 51 por 33 obtemos quociente 1 e resto 18. Daí mdc(33, 51) = mdc(33, 18).

Dividindo 18 por 33 obtemos quociente 1 e resto 15. Logo mdc(18, 33) = mdc(18, 15).

Dividindo 18 por 15 obtemos quociente 1 e resto 3, de modo que mdc(15, 18) = mdc(15, 3) = 3.

F) mdc(2282, 7063).

Solução.

Dividindo 7063 por 2282 obtemos $7063 = 3 \cdot 2282 + 217$. Assim mdc(2282, 7063) = mdc(2282, 217).

Dividindo 2282 por 217 obtemos $2282 = 10 \cdot 217 + 112$. Logo mdc(217, 2282) = mdc(217, 112)

Dividindo 217 por 112 obtemos $217 = 1 \cdot 112 + 105$ e assim mdc(112, 217) = mdc(112, 105).

Dividindo 112 por 105 obtemos $112 = 1 \cdot 105 + 7$ de modo que mdc(105, 112) = mdc(105, 7).

4)Verifique cada uma das seguintes propriedades.

(a) mdc(0, b) = b.

Verdadeiro

(b) mdc(1, b) = 1.

Verdadeiro

(c) mmc(a, a) = mdc(a, a) = a.

Verdadeiro

(d) mdc(a, b) ≤ a e mdc(a, b) ≤ b.

Verdadeiro

(e) mmc(a, b) ≥ a e mmc(a, b) ≥ b.

Verdadeiro

5) O produto de dois números de dois algarismos cada é 1728. Se o máximo divisor comum deles é 12, quais são estes números?

Solução.

Como 12 é o mdc dos dois números e cada um tem dois algarismos, os únicos candidatos são os múltiplos de 12 menores do que 100, ou seja, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84 e 96.

Como $1728 = 12 \cdot 12 \cdot 12 = (2.2.2.2.2.2).(3.3.3)$, os múltiplos 60 (com fator 5) e 84 (com fator 7) não são divisores de 1728.

Também $1728 \div 12 = 144$ e $1728 \div 96 = 18$, de modo que a lista reduz a 24, 36, 48 e 72, com

$24 \times 72 = 36 \times 48 = 1728$.

Como o mdc de 24 e 72 é 24, temos uma única solução, a saber, 36 e 48, cujo produto é 1728 e o mdc é 12.

6) Determine dois números a e b tais que mmc(a, b) = 150 e a + b = 80.

Solução. Como mmc(a, b) = 150 é um múltiplo de a e de b, segue que a e b são divisores de 150.

O conjunto dos divisores de 150 é:

D(150) = {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 50, 75, 150}.

As únicas possibilidade de dois números deste conjunto cuja soma é 80 são:

5 + 75 = 80 e 30 + 50 = 80.

Mas mmc(5, 75) = 75 e mmc(30, 50) = 150.

Portanto os números procurados são 30 e 50.

7) Calcule mdc $(n + 1, n^2 + 1)$, para n inteiro

Solução:

Mdc $(n+1, n^2+1) = \text{mdc} (n+1, n^2+1 -n.(n+1)) = \text{mdc}(n+1, n^2+1-n^2-n) = \text{mdc}(n+1, -n+1) = \text{mdc}(n+1, -n+1 +1.(n+1)) = \text{mdc}(n+1, -n+1+n+1) = \text{mdc}(n+1, 2)$.

Assim, se n é par, então n + 1 é ímpar e, logo, $\text{mdc}(n+1, n^2+1) = \text{mdc}(n + 1, 2) = 1$;

e se n é ímpar, então n + 1 é par e, logo, $\text{mdc}(n+1, n^2+1) = \text{mdc}(n + 1, 2) = 2$

8) Use o algoritmo do mdc de Euclides para calcular mdc (648, −1218) e encontre inteiros x e y tais que mdc (648, −1218) = 648x + (−1218y).

Solução:

Tem-se mdc(648, −1218) = mdc(648, 1218).

Aplicando o algoritmo do mdc de Euclides, tem-se:

$1218 = 1 \cdot 648 + 570$,

$648 = 1 \cdot 570 + 78$,

$570 = 7 \cdot 78 + 24$,

$78 = 3 \cdot 24 + 6$ e

$24 = 4 \cdot 6 + 0$.

Logo, $mdc(648, -1218) = 6$.

Realizando o processo de trás para frente, tem-se:

$6 = 78 - 3 \cdot 24 = 78 - 3 \cdot (570 - 7 \cdot 78) = -3 \cdot 570 + 22 \cdot 78 = -3 \cdot 570 + 22 \cdot (648 - 570) = 22 \cdot 648 - 25 \cdot 570 = 22 \cdot 648 - 25 \cdot (1218 - 648) = 648 \cdot 47 + (-1218) \cdot 25$.

Logo, $x = 47$ e $y = 25$.

9) A) Encontre todos os inteiros múltiplos de 3 que divididos por 15 deixam resto igual a 8.

Seja n um inteiro múltiplo de 3 que dividido por 15 deixa resto 8.

Então, existem inteiros x e y tais que $n = 3x = 15y + 8$.

Como $3x = 15y + 8$, obtém-se a equação diofantina $3x - 15y = 8$, que não tem solução porque $mdc(3, -15) = 3$ não divide 8.

Assim, não existem inteiros múltiplos de 3 que divididos por 15 deixam resto igual a 8.

B) Encontre todos os inteiros pares que divididos por 15 deixam resto igual a 8.

Seja n um inteiro par que dividido por 15 deixa resto 8.

Então, existem inteiros x e y tais que $n = 2x = 15y + 8$.

Como $2x = 15y + 8$, obtémse a equação diofantina $2x - 15y = 8$, que tem solução porque:

$mdc(2, -15) = 1$ divide 8.

Como $2 \cdot (-7) - 15 \cdot (-1) = 1$,

então $2 \cdot (-7 \cdot 8) - 15 \cdot (-1 \cdot 8) = 8$ e,

portanto, $X0 = -7 \cdot 8 = -56$ e $Y0 = -1 \cdot 8 = -8$ é uma solução particular da equação diofantina $2x - 15y = 8$.

Assim, a solução geral da equação diofantina é dada por $x = -56 - 15t$ e $y = -8 - 2t$,

com t variando no conjunto dos inteiros.

Assim, $n = 2x = 2 \cdot (-56 - 15t) = -112 - 30t$, com t variando no conjunto dos inteiros