Permutacões com elementos repetidos

Lembre-se de que permutar um grupo de elementos consiste em colocá-los em uma determinada ordem. E lembre-se de que, quando n é um inteiro não negativo, a quantidade de permutações de um grupo de n objetos distintos é igual a $P_n = n!$. De outra forma, a quantidade de maneiras de ordenar um conjunto com n elementos é igual a $P_n = n!$. Nessa aula, desejamos contar a quantidade de permutações de uma lista de objetos, onde alguns desses objetos podem aparecer repetidos, isto é, podem estar listados mais de uma vez. Em uma permutação com objetos repetidos, cada objeto deve aparecer na permutação exatamente a mesma quantidade de vezes que aparece na lista original. Vejamos um exemplo.

Exemplo 1. Maria tem três restaurantes favoritos. Um deles é uma hamburgueria, outro é um restaurante italiano e o terceiro é um restaurante japonês. Ela acabou de conseguir um novo emprego e, para comemorar, pretende jantar em um desses restaurantes durante os próximos quatro dias. Como o restaurante japonês é o seu favorito, ela decidiu que irá exatamente duas vezes a ele e uma vez a cada um dos demais. De quantas formas ela pode escolher a ordem em que irá jantar nesses restaurantes?

Solução 1. Vamos usar as letras H, I e J para representar, respectivamente, a hamburgueria, o restaurante italiano e o restaurante japonês. Podemos usar uma palavra formada por quatro dessas letras para indicar em que ordem Maria irá jantar nesses restaurantes. Lembramos que, nesse contexto, uma palavra é qualquer sequência de letras. Por exemplo, IJHJ é a palavra que indica que Maria irá primeiro ao restaurante italiano, em seguida ao japonês, depois à hamburgueria e, por fim, novamente ao japonês. Para satisfazer a condição de que Maria irá ao restaurante japonês exatamente duas vezes e irá aos demais uma vez, as palavras que iremos formar devem ser anagramas de HIJJ. Queremos, então, contar quantos desses anagramas existem.

A ideia para resolver esse tipo de problema é transformá-lo em um problema que já sabemos resolver. Veja que, se tivéssemos 4 restaurantes distintos, a solução seria bastante simples. Vamos supor por um momento que existissem dois restaurantes japoneses, que iremos chamar de J_1 e J_2, e que Maria desejasse ir uma vez a cada um deles. Nesse caso, para resolver o problema bastaria calcular o número de permutações do conjunto $\{H, I, J_1, J_2\}$, que é igual a $P_4 = 4! = 24$. Acontece que, em verdade, J_1 e J_2 são o mesmo restaurante. Sendo assim, existem permutações diferentes, dentre essas 24 permutações, que determinam uma mesma ordem para os restaurantes em que Maria irá, de fato, jantar. Por exemplo, as permutações HIJ_1J_2 e HIJ_2J_1 são distintas, mas ambas fazem com que Maria visite os restaurantes na ordem indicada pela palavra $HIJJ$. Veja que, em verdade, em qualquer permutação de $\{H, I, J_1, J_2\}$ podemos trocar a ordem entre J_1 e J_2 sem alterar a ordem em que Maria irá visitar os restaurantes. Por outro lado, se trocarmos J_1 ou J_2 com qualquer outra letra, faremos com que a agenda de Maria seja diferente. Dessa forma, podemos organizar as 24 permutações em grupos, onde cada grupo é formado por $2 = 2!$ permutações que representam representam o mesmo anagrama de $HIJJ$. A quantidade de tais grupos é

$$\frac{P_4}{2!} = \frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12,$$

e essa é a resposta para o nosso problema, pois cada grupo corresponde a um anagrama distinto de $HIJJ$. Para que você visualize claramente essa solução, listamos, na tabela abaixo, todas as 24 permutações do conjunto $lbraceH, I, J_1, J_2\}$, destacando os pares de permutações que correspondem a uma mesma solução, do ponto de vista de Maria.

HIJ_1J_2	IHJ_1J_2	IJ_1HJ_2	IJ_1J_2H
HIJ_2J_1	IHJ_2J_1	IJ_2HJ_1	IJ_2J_1H
HJ_1IJ_2	J_1HIJ_2	J_1IHJ_2	J_1IJ_2H
HJ_2IJ_1	J_2HIJ_1	J_2IHJ_1	J_2IJ_1H
HJ_1J_2I	J_1HJ_2I	J_1J_2HI	J_1J_2IH
HJ_2J_1I	J_2HJ_1I	J_2J_1HI	J_2J_1IH

A tabela abaixo, por sua vez, foi obtida a partir da anterior, substituindo J_1 e J_2 por J. Veja que cada anagrama de $HIJJ$ aparece exatamente duas vezes nela. Por isso a quantidade de anagramas distintos é apenas $\frac{24}{2} = 12$.

HIJJ	IHJJ	IJHJ	IJJH
HIJJ	IHJJ	IJHJ	IJJH
HJIJ	JHIJ	JIHJ	JIJH
HJIJ	JHIJ	JIHIJ	JIJH
HJJI	JHJI	JJHI	JJIH
HJJI	JHJI	JJHI	JJIH

Exemplo 2. Calcule o número de anagramas da palavra ABACATE.

Solução. Veja que temos 7 letras e que uma delas, a letra A, é repetida três vezes, enquanto as demais aparecem, cada uma, apenas uma vez. Primeiramente vamos substituir a letra A pelas letras A_1, A_2 e A_3, obtendo-se o conjunto $\{A_1, B, A_2, C, A_3, T, E\}$. Sabe-se que o número de permutações desse conjunto é $P_7 = 7! = 5.040$. Agora, tente imaginar uma lista com todas essas 7! permutações e substitua todas as ocorrências das letras A_1, A_2 e A_3 pela letra A. O resultado é uma lista com 7! anagramas de ABACATE, mas nessa lista cada anagrama aparece mais de uma vez. Precisamos contar quantas vezes cada anagrama aparece e usar essa informação para calcular o número de anagramas distintos. Para isso, basta observar que, para cada permutação da lista original, o número de permutações que geram o mesmo anagrama é igual ao número de maneiras de permutarmos as letras A_1, A_2, A_3 sem mover as demais letras dentro da permutação em questão. Por exemplo, o anagrama AABACTE pode ser obtido a partir de uma qualquer das $3! = 6$ permutações a seguir:

$$\begin{array}{ll} A_1A_2BA_3CTE, & A_1A_3BA_2CTE, \\ A_2A_1BA_3CTE, & A_2A_3BA_1CTE, \\ A_3A_1BA_2CTE, & A_3A_2BA_1CTE. \end{array}$$

Desse modo, na lista com os 7! anagramas, cada anagrama aparece exatamente 3! vezes. A conclusão é que o número de anagramas distintos de ABACATE é apenas

$$\frac{7!}{3!} = \frac{5040}{6} = 840$$

Se, em uma palavra com n letras, há uma letra que se repete t vezes e todas as demais aparecem apenas uma vez, então o número de anagramas dessa palavra é:

$$\frac{P_n}{t!} = \frac{n!}{t!}$$

Vejamos, agora, o que acontece se tivermos mais de uma letra que aparece mais de uma vez.

Exemplo 3. Qual o número de anagramas da palavra COPACABANA?

Solução. Aqui, temos uma palavra com 10 letras, sendo que a letra A aparece 3 vezes, a letra C aparece 2 vezes e as letras P, B, N, O aparecem apenas 1 vez. Devemos considerar, inicialmente, todas as permutações do conjunto $L = \{C_1, O, P, A_1, C_2, A_2, B, A_3, N, A_4\}$. Esse conjunto possui 10! permutações. Cada uma dessas permutações irá gerar um anagrama de COPACABANA no momento em que removermos os rótulos das letras A e C. Agora, precisamos contar quantas permutações distintas de L geram um mesmo anagrama da palavra COPACABANA. Isso nos ajudará a calcular a quantidade de anagramas que realmente são distintos. A pergunta fundamental é a seguinte: fixada uma permutação de L, quantas são as permutações que geram o mesmo

anagrama que ela? Veja que esse número não depende da permutação em questão. Ele é igual, simplesmente, à quantidade de maneiras que temos de permutar tanto as letras C_1,C_2 entre si, como as letras A_1, A_2, A_3, A_4 entre si. O número de maneiras de permutar C_1 e C_2 é 2!, enquanto o número de maneiras de permutar A_1, A_2, A_3, A_4 é 4!. Como as escolhas dessas duas permutações podem ser tomadas de maneira independente e devemos realizar ambas as escolhas, pelo princípio fundamental da contagem, o número total de permutações de L que geram um mesmo anagrama de COPACABANA é igual a $2! \times 4! = 48$. Sendo assim, olhando para a lista das 10! permutações de L, percebemos que podemos arranjá las em grupos de 48 permutações, as quais geram um único anagrama de COPACABANA. Segue que o número de anagramas distintos igual a $\dfrac{10!}{2! \times 4!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{2 \times 4!} = 75.600.$

No caso mais geral em que temos uma palavra com n letras, na qual várias delas podem ser repetidos várias vezes, temos o seguinte resultado.

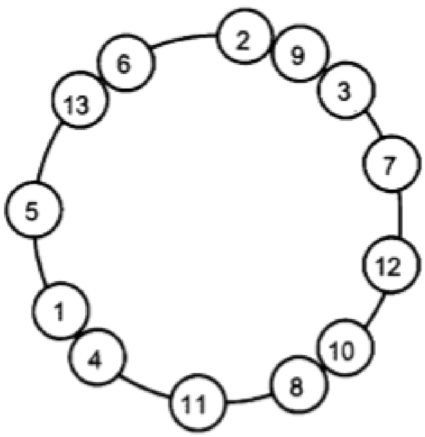
Sejam $n, n_1, n_2, ..., n_k$ números naturais tais que $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$. Considere uma palavra com n letras, sendo k dessas letras distintas. Se $n_1, ..., n_k$ representam os números de vezes que cada letra diferente aparece, então o número de anagramas de tal palavra é igual a

$$P^n_{n_1,n_2,...,n_k} = \frac{n!}{n_1! \times n_2!...n_k!}.$$

Exemplo 4. De quantos modos 6 pessoas (João, Maria, Pedro, Janete, Paulo e Alice) podem ser divididas em 3 duplas?

Solução: O problema é mais sutil do que parece a princípio. Uma maneira de dividir as 6 pessoas em duplas é colocar as pessoas em fila e formar uma permutação de AABBCC, isto pode ser feito de $6! \times 2! \times 2! \times 2! = 90$ modos. Mas isto não está correto, pois atribuiu nomes específicos (A, B e C) às duplas formadas. Note que colocar João e Maria na dupla A e Pedro e Janete na dupla B é equivalente a colocar João e Maria na dupla B e Pedro e Janete na dupla A. Portanto, uma mesma distribuição em duplas está sendo contada várias vezes. Mais precisamente, cada distribuição em duplas está sendo contada tantas vezes quanto o número de modos de ordenar A, B e C, ou seja, $3! = 6$ vezes. Logo, o número de possíveis distribuições em duplas é $\frac{90}{6} = 15$.

Exemplo 5. Um "colar" consiste em um fio circular com diversas contas presas nele. É permitido girar o colar, mas não virá-lo de cabeça para baixo. Quantos colares diferentes podem ser feitos com 13 contas diferentes?



Solução: Vamos primeiro supor que não podemos girar o colar. Neste casoé claro que existem 13! colares diferentes. Entretanto, qualquer arranjo de contas tem que ser considerado idênticos aos 12 obtidos por rotação. Logo $\frac{13!}{13} = 12!$

Formalmente, um anagrama de uma palavra ou frase é uma permutação das letras para formar uma palavra ou frase diferente. Em anagramas, os espaços e acentos são geralmente ignorados. Por exemplo, um anagrama de "anagrama" é "naga a ram". Em matemática, e para este problema, usamos com frequência "anagrama" para significar qualquer permutação de letras em uma palavra, de modo que consideramos "aaaarngm" como sendo um anagrama de "anagrama".

(a) Quantos anagramas tem a palavra MOCINHA?

Solução: Primeiro, vamos combinar que contaremos a própria palavra como um de seus anagramas.

A palavra dada tem 7 letras, todas distintas. Para contar o número de anagramas de uma palavra com exatamenteuma letra é fácil: existe exatamente um anagrama. Vamos inserir na palavra de uma letra uma segunda letra diferente da primeira. Ela pode ser colocada na frente ou atrás da letra dada, de modo que existem dois anagramas de uma palara com duas letras. Insira mais uma letra diferente. Temos que considerar todas as cadeias de letras existentes e colocar uma letra nova em cada uma delas. Para cada cadeia com duas letras, isso pode ser feito de três maneiras diferentes, colocando a letra nova na frente, no meio ou no final. Portanto uma palavra com 3 letras terá $2 \times 3 = 6$ anagramas; uma quarta letra pode ser inserida em 4 lugares diferentes, de modo que uma palavra com 4 letras tem $4 \times 6 = 24$ anagramas; uma palavra com 5 letras tem $5 \times 24 = 120$ anagramas; e assim por diante. Para uma palavra com 7 letras, obtemos $2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040$ anagramas. O produto de todos os inteiros consecutivos de 1 até n é denotado po $n!$. Logo o número de anagramas de uma palavra com 7 letras distintas pode ser escrito como 7!.

(b) Você pode encontrar um anagrama que signifique um animal? Você pode encontrar outros que sejam palavras em português?

Solução: Minhoca; caminho.

(c) Decifre a frase a seguir onde as palavras corretas estão substituídas por seus anagramas: VALORES BRALEMPOS SACATOMITEM TEMERIANIDA.

Solução: RESOLVA PROBLEMAS MATEMATICOS DIARIAMENTE.