ENCONTRO 2 – CICLO 3

PROFESSOR: JOSÉ REIS DE ALMEIDA

PROBABILIDADE – PARTE 1

<u>RESUMÃO</u>

Conceitos básicos:

- ### <u>Experimentos aleatórios:</u>

São os experimentos que, repetidos em idênticas condições, produzem resultados que não podem ser previstos com certeza.

- ### <u>Espaço amostral:</u>

É o conjunto (indicado por Ω) formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

- ### <u>Evento:</u>

É todo subconjunto de Ω que, em geral, indicamos por uma letra maiúscula do alfabeto.

Exemplos:

1º) Um dado, não viciado, é lançado e observa-se o número da face de cima.

Neste caso temos:

a) Lançar o dado e observar o número da face de cima é o experimento aleatório.
b) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ é o espaço amostral.
c) Eis alguns eventos:
    i. Ocorrência de número ímpar, ou seja: $\{1, 3, 5\}$.
    ii. Ocorrência de número primo, ou seja: $\{2, 3, 5\}$.
    iii. Ocorrência de número maior que 4, ou seja: $\{5, 6\}$.
    iv. Ocorrência de número maior ou igual a 7, ou seja: $\varnothing$.

Observação 1: Note que se #Ω = n (lê-se: cardinalidade de Ω ou número de elementos/resultados possíveis), então 2^n subconjuntos e, portanto: 2^n eventos. Entre os eventos, o Ø (chamado **evento impossível**) e o próprio Ω (chamado **evento certo**).

Definição de probabilidade: Suponha que $\Omega = \{\omega_1, . . . , \omega_k\}$. Uma probabilidade Pr em que Ω é uma função definida sobre os subconjuntos de Ω e satisfazendo as condições a seguir:

(a) $Pr(\emptyset) = 0$;

(b) $0 \leq Pr(\omega i) \leq 1$, para todo $\omega i \in \Omega$;

(c) $Pr(\omega 1) + Pr(\omega 2) + \cdot \cdot \cdot + Pr(\omega k) = 1$;

(d) para qualquer evento E, a probabilidade de E ocorrer, denotada por Pr(E), é a soma das probabilidades de seus elementos.

Observação 2: Note que o item (c) da definição anterior implica que Pr(Ω) = 1. Também, para eventos A e B disjuntos (sem elementos em comum), segue prontamente do item (d) que **Pr(A ∪ B) = Pr(A) + Pr(B)**.

Dados os tópicos conceituais acima, seguem alguns exemplos com suas respectivas soluções e, em seguida, alguns exercícios, os quais gostaria que vocês os fizessem e me enviassem via email ou Portais PIC/Matemática.

Exemplo 1 *Ao lançar um dado honesto, ou seja, um em que todas as faces têm a mesma chance de serem obtidas, a probabilidade de obter cada uma das faces é igual a $1/6$. Ao jogar tal dado, a probabilidade de se obter um número primo é igual a:*

$$\Pr(\{2,3,5\}) = \Pr(2) + \Pr(3) + \Pr(5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Observe que, se lançarmos um dados honesto 6.000 vezes é de se esperar que o número de vezes em que o resultado obtido é o número 5 seja de aproximadamente $\Pr(5) \cdot 6.000 = \frac{1}{6} \cdot 6.000 = 1.000$, uma vez que a frequência relativa do número 5 deve estar próxima de $1/6$. É claro que as chances de obtermos exatamente mil vezes o número 5 não são tão boas assim. Mas, usando ferramentas mais avançadas, é possível estimar com boa precisão o intervalo (em todo de 1.000) que, com altíssima probabilidade, contém o número de ocorrências do número 5.

Exemplo 2 (VUNESP, adaptado). *Certo jogo consiste de um dispositivo eletrônico, na forma de um círculo, dividido em 10 setores numerados de 1 a 10. Em cada jogada, um único setor do disco se ilumina. O dispositivo foi programado de forma que para quaisquer números pares a e b, a probabilidade de que a seja iluminado é igual à probabilidade de que b seja iluminado. O mesmo vale para quaisquer dois números ímpares. Por outro lado, se a é ímpar e b é par, então a probabilidade de a ser iluminado é o dobro da probabilidade de b ser iluminado. Qual a probabilidade do número 2 ser iluminado? E do número 3? Qual a probabilidade do número iluminado ser primo?*

Solução. O espaço amostral correspondente é o conjunto $\Omega = \{1, 2, \ldots, 10\}$. De acordo com os dados do problema, pelo modo como o dispositivo foi programado, é mais provável que o número iluminado seja ímpar do que par (apesar de as quantidades de números pares e ímpares serem iguais). Chamando $\Pr(1)$ de x e $\Pr(2)$ de y, pelos dados do problema podemos concluir que:

$$x = \Pr(1) = \Pr(3) = \Pr(5) = \Pr(7) = \Pr(9),$$

$$y = \Pr(2) = \Pr(4) = \Pr(6) = \Pr(8) = \Pr(10),$$

e

$$x = 2y.$$

Como $\Pr(1) + \cdots + \Pr(10) = 1$, segue que

$$1 = 5x + 5y = 5 \cdot (2y) + 5y = 15y.$$

Portanto $y = 1/15$ e $x = 2/15$. Em particular, $\Pr(2) = 1/15$ e $\Pr(3) = 2/15$.

Por fim, a probabilidade do número iluminado ser primo é igual à probabilidade do número iluminado pertencer ao conjunto $E = \{2, 3, 5, 7\}$. Assim,

$$\begin{aligned}\Pr(E) &= \Pr(2) + \Pr(3) + \Pr(5) + \Pr(7) \\ &= \frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{2}{15} + \frac{2}{15} \\ &= \frac{7}{15}.\end{aligned}$$

Exemplo 3 *No lançamento de um dado viciado de seis faces (numeradas de 1 a 6), a probabilidade de sair qualquer número é proporcional a esse número. Calcule a probabilidade de sair um número:*

(a) par;

(b) maior que 4.

Solução. O espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Deve existir um constante de proporcionalidade k tal que:

$$\Pr(1) = k,\ \ \Pr(2) = 2k,\ \Pr(3) = 3k$$
$$\Pr(4) = 4k,\ \Pr(5) = 5k,\ \Pr(6) = 6k.$$

Mas, como a soma das probabilidades dos eventos simples é igual a 1, devemos ter

$$k + 2k + 3k + 4k + 5k + 6k = 1 \Leftrightarrow 21k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{21}.$$

Portanto, a probabilidade do número obtido no dado ser par é igual a

$$\Pr(2) + \Pr(4) + \Pr(6) = 2k + 4k + 6k = 12k = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}.$$

Por sua vez, a probabilidade do número ser maior que 4 é igual à probabilidade dele ser igual a 5 ou 6, que é

$$\Pr(5) + \Pr(6) = 5k + 6k = 11k = \frac{11}{21}.$$

Exercícios sugeridos

1º) Numa urna existem duas bolas vermelhas e seis brancas. Sorteando-se uma boa, qual a probabilidade de ela ser vermelha?

2º) qual é a probabilidade de se obter um resultado maior que 4 ao se lançar um dado honesto?

Ao lançar um dado duas vezes, qual é a probabilidade de se obter soma 5?

3º) Numa cidade com 1000 eleitores vai haver uma eleição com dois candidatos, A e B. é feita uma prévia em que os 1000 eleitores são consultados, sendo que 510 já se decidiram, definitivamente, por A. Qual é a probabilidade de que A ganhe a Eleição?