Módulo de Elementos básicos de geometria plana

Triângulos

Oitavo Ano

Triângulos

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. *Classifique cada sentença como verdadeira (V) ou falsa (F):*

a) Todo triângulo retângulo é isósceles.

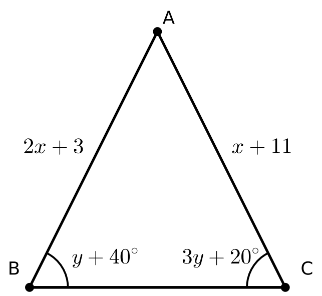
b) Os três ângulos de um triângulo equilátero são congruentes.

c) Um triângulo é isósceles se possui os três lados congruentes.

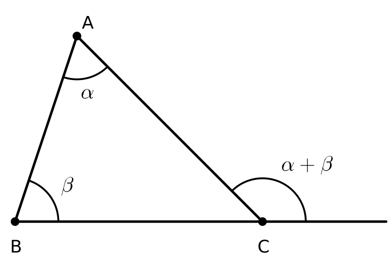
d) Não existe triângulo que seja simultaneamente retângulo e equilátero.

e) Não existe triângulo que seja simultaneamente retângulo e isósceles.

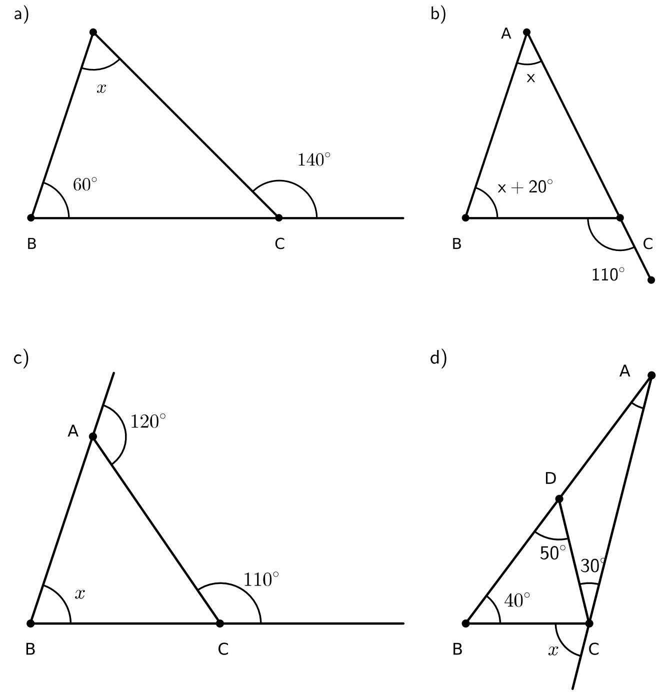
Exercício 2. *No desenho abaixo, o triângulo $\triangle ABC$ é isósceles com base BC. Determine os valores de x e y.*



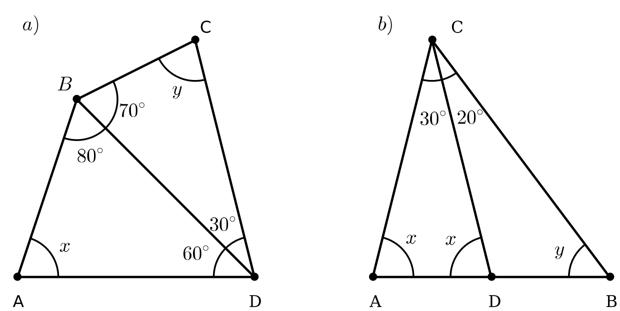
Exercício 3. *O teorema do ângulo externo afirma que a medida de um ângulo externo de triângulo é a soma das medidas dos outros dois ângulos internos não adjacentes a ele. Podemos verificar tal afirmação lembrando que a soma dos ângulos de um triângulo sempre é 180°. Assim, no desenho abaixo, o ângulo $\angle BCA$ mede $180^\circ - \alpha - \beta$ e o ângulo externo correspondente é o seu suplementar, ou seja, vale $\alpha + \beta$.*



Em cada um dos itens abaixo, determine o valor do ângulo x.



Exercício 4. *Determine os valores de x e y nos itens abaixo:*



Exercício 5. *Dizemos que um triângulo é acutângulo quando todos os seus ângulos são menores que um ângulo reto. Dizemos que um triângulo é retângulo quando um de seus ângulos for igual a um ângulo reto. Por fim, dizemos que um triângulo é obtusângulo quando um dos seus ângulos for maior que um ângulo reto. Sabendo que a soma dos ângulos de um triângulo é sempre 180°, determine em cada um dos itens abaixo se o triângulo é acutângulo, obtusângulo ou retângulo conhecendo apenas dois de seus ângulos.*

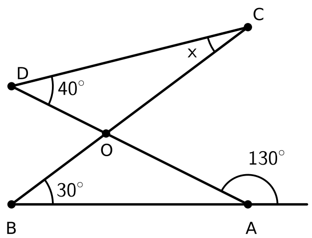
a) $\angle ABC = 70^\circ$ *e* $\angle BCA = 10^\circ$.

b) $\angle ABC = 80^\circ$ *e* $\angle BCA = 15^\circ$.

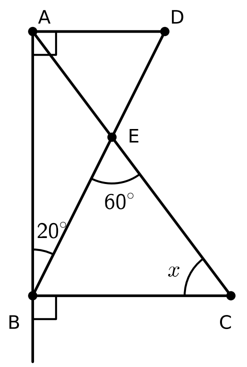
c) $\angle ABC = 30^\circ$ *e* $\angle BCA = 60^\circ$.

d) $\angle ABC = 60^\circ$ *e* $\angle BCA = 60^\circ$.

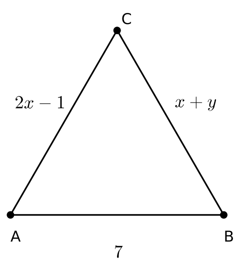
Exercício 6. *Determine o valor de x no desenho abaixo.*



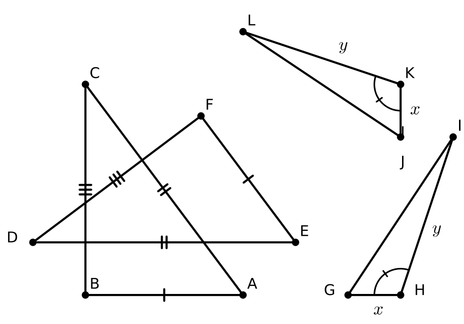
Exercício 7. *Determine o valor de x no desenho abaixo.*



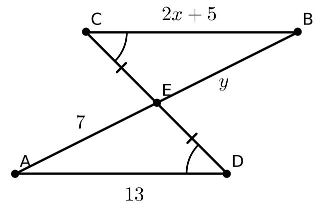
Exercício 8. *Na figura abaixo, o triângulo $\triangle ABC$ é equilátero. Determine os valores de x e y.*



Exercício 9. *No desenho abaixo, existem dois pares de triângulos congruentes. A partir do desenho, determine que pares são esses e justifique em quais casos de congruências eles se enquadram.*



Exercício 10. *No desenho abaixo, os triângulos $\triangle AED$ e $\triangle CEB$ são congruentes com $CE = ED$ e $\angle ECB = \angle EDA$. Determine os valores de x e y.*



Exercício 11. *Diga o nome de cada um dos seguintes pontos notáveis de um triângulo:*

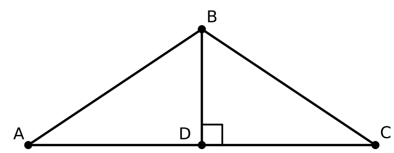
a) Ponto de encontro das bissetrizes.

b) Ponto de encontro das retas suportes das alturas.

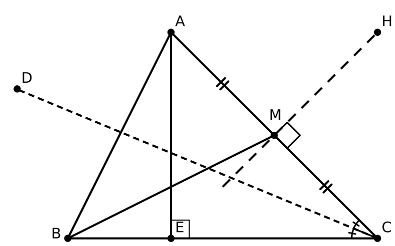
c) Ponto de encontro das medianas.

d) Ponto de encontro das mediatrizes dos lados.

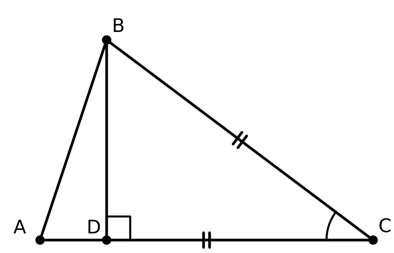
Exercício 12. *No desenho abaixo, O triângulo $\triangle ABD$ é congruente ao triângulo $\triangle BDC$ com $AD = DC$. Se $AC = x + y$, $DC = 4x$, $AB = 5x$ e $BC = 3x + 2$, determine os valores de x e y.*



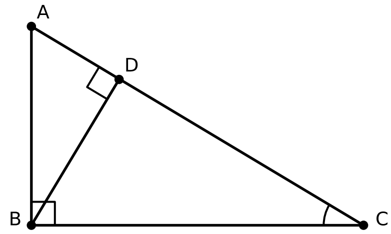
Exercício 13. *Determine no desenho abaixo os seguintes objetos geométricos: uma mediana, uma altura, uma bissetriz e uma mediatriz.*



Exercício 14. *No desenho abaixo, BD é uma altura relativa ao lado AC e $BC = AC$. Se $\angle ACB = 40°$, determine o valor do ângulo $\angle ABD$.*

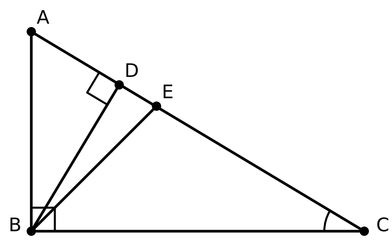


Exercício 15. *No desenho abaixo, sabendo que $\angle BCA = 30°$, encontre o valor de $\angle ABD$.*

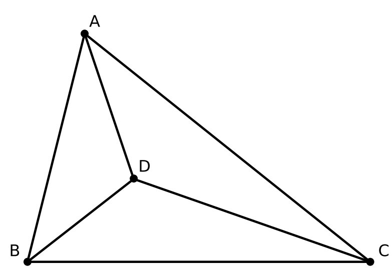


2 Exercícios de Fixação

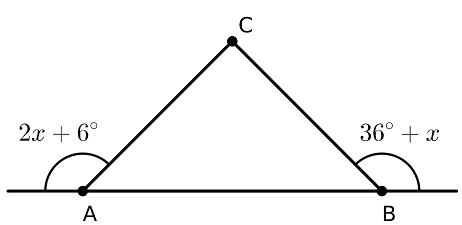
Exercício 16. *No desenho abaixo, BE é bissetriz de $\angle ABC$. Se $\angle ACB = 30^\circ$, determine o ângulo $\angle DBE$.*



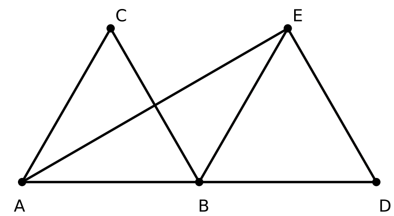
Exercício 17. *No desenho abaixo, o ponto D é o incentro do triângulo $\triangle ABC$. Sabendo que $\angle ADB = 110^\circ$, $\angle ADC = 130^\circ$ e $\angle BDC = 120^\circ$, determine os ângulos do triângulo.*



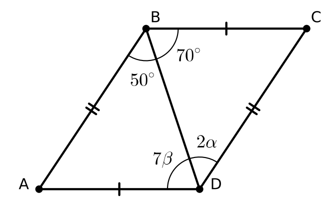
Exercício 18. *O triângulo abaixo é isósceles de base AB. Determine o valor do ângulo x.*



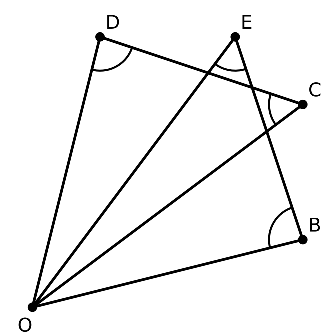
Exercício 19. *No desenho abaixo, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle BED$ são equiláteros de mesmo lado. Determine o ângulo $\angle AEB$.*



Exercício 20. *No desenho abaixo, os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle BDC$ são congruentes. Determine as medidas de α e β.*



Exercício 21. *Na figura abaixo, $\angle ODC = \angle OBE$ e $\angle OEB = \angle DCO$. Se $DC = EB$, $\angle DOB = 60^\circ$ e $OB = 5cm$, determine o comprimento de BD.*

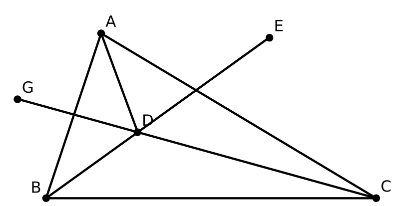


Exercício 22. *No desenho abaixo, GC e BE são as bissetrizes dos ângulos $\angle ACB$ e $\angle ABC$, respectivamente. Se $\angle BAC = 60^\circ$ e $\angle ABC = 80^\circ$, determine:*

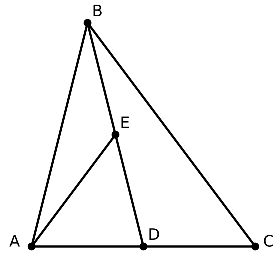
a) o ângulo $\angle ACB$;

b) os ângulos $\angle DCB$ e $\angle DBC$;

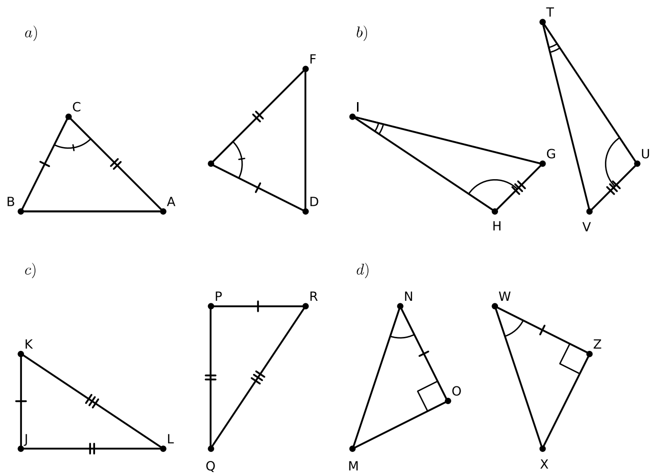
c) o ângulo $\angle BDC$.



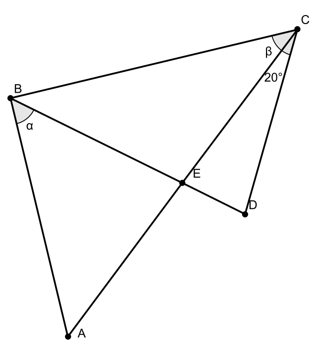
Exercício 23. *No desenho abaixo, BD é uma mediana do triângulo $\triangle ABC$ e AE uma mediana do triângulo $\triangle BAD$. Além disso, $AD = DE$. Se $DC = 8cm$, determine a medida do segmento BE.*



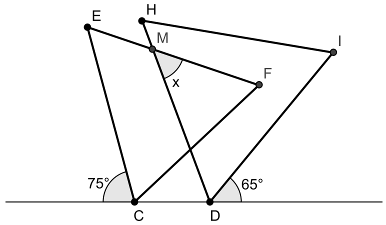
Exercício 24. *Indique para cada par de triângulos dos itens abaixo qual caso de congruência pode ser aplicado.*



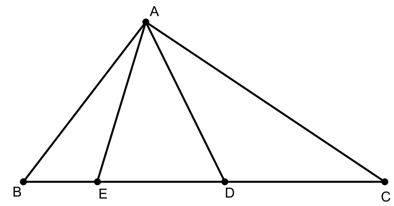
Exercício 25. *Na figura, temos $AE = BE = CE = CD$. Além disso, α e β são medidas de ângulos. Determine o valor da razão $\frac{\alpha}{\beta}$.*



Exercício 26. *Na figura, os dois triângulos são equiláteros e os ângulos dados em graus. Determine o valor de x.*

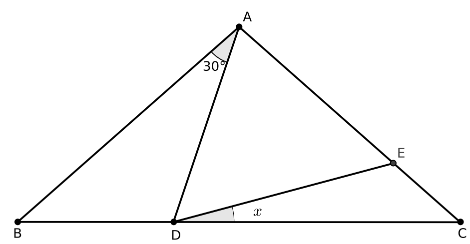


Exercício 27. *No triângulo ABC, os pontos D e E pertencem ao lado BC e são tais que $BD = BA$ e $CE = CA$. Dado que $\angle DAE = 40°$, determine a medida do ângulo $\angle BAC$.*



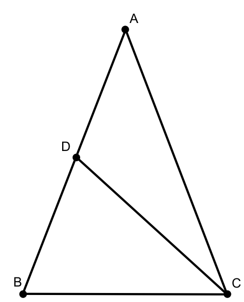
Exercício 28. *Em um triângulo ABC, $\angle BAC = 20°$ e $\angle ABC = 110°$. Se I é o incentro (centro da circunferência inscrita) e O o circuncentro (centro da circunferência circunscrita) do triângulo $\triangle ABC$, determine a medida do ângulo $\angle IAO$.*

Exercício 29. *Na figura, $AB = AC$, $AE = AD$ e o ângulo $\angle BAD$ mede $30°$. Determine a medida do ângulo x.*

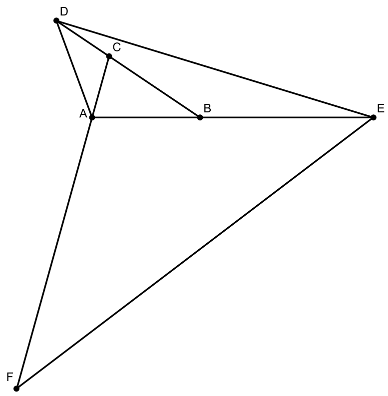


3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 30. *Na figura, o triângulo $\triangle ABC$ é isósceles de base BC e o ângulo $\angle BAC$ mede $30°$. O triângulo $\triangle BCD$ é isósceles de base BD. Determine a medida do ângulo $\angle DCA$.*



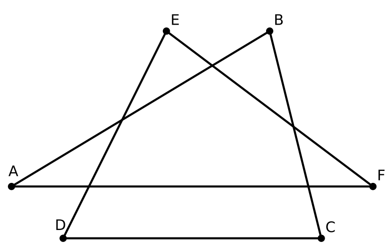
Exercício 31. *Na figura abaixo, o ângulo $\angle ADC$ mede $48°$ e os triângulos $\triangle ACD$, $\triangle DBE$ e $\triangle EAF$ são isósceles de bases AD, DE e EF, respectivamente. Determine a medida do ângulo $\angle DEF$.*



Exercício 32. *Em um triângulo $\triangle ABC$, com $\angle ABC - \angle BAC = 50°$, a bissetriz do ângulo $\angle ACB$ intersecta o lado AB em D. Seja E o ponto do lado AC tal que $\angle CDE = 90°$. Determine a medida do ângulo $\angle ADE$.*

Exercício 33. *Os pontos M e N são escolhidos na hipotenusa AB do triângulo retângulo $\triangle ABC$ de modo que $BC = BM$ e $AC = AN$. Prove que o ângulo $\angle MCN$ mede $45°$.*

Exercício 34. *Se a soma das medidas em graus dos ângulos A, B, C, D, E e F da figura abaixo é $90n$, qual o valor de n?*



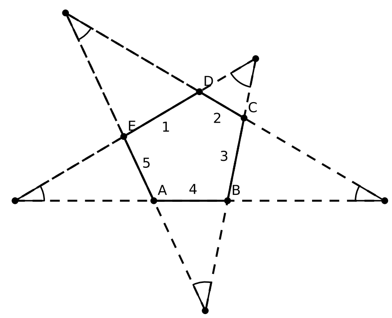
Exercício 35. *A altura CH e a mediana BK são desenhadas em um triângulo acutângulo $\triangle ABC$. Sabemos que $BK = CH$ e que $\angle KBC = \angle HCB$. Prove que o triângulo $\triangle ABC$ é equilátero.*

Exercício 36. *Demonstre que a soma dos ângulos internos de um triângulo é $180°$.*

Exercício 37. *A mediana BM, a altura AH e a bissetriz CK de um triângulo $\triangle ABC$ são desenhadas. Sabemos que AH intersecta BM em L, AH intersecta CK em N e BM intersecta CK em P. Os pontos L, N e P são distintos. Prove que o triângulo LNP não pode ser equilátero.*

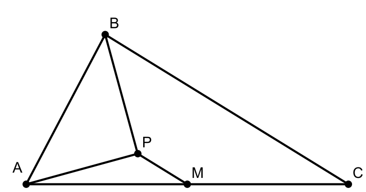
Exercício 38. *No triângulo $\triangle ABC$ com $\angle BAC = 30°$, BB_1 e CC_1 são alturas. Sejam B_2 e C_2 os pontos médios de AC e AB, respectivamente. Prove que os segmentos B_1C_2 e B_2C_1 são perpendiculares.*

Exercício 39. *Uma estrela de "n pontas" é formada como segue. Começamos numerando os lados de um polígono convexo de n lados com $1, 2, \ldots, n$ de forma consecutiva. As pontas das estrelas são formadas pelas interseções das retas que passam por lados que diferem por duas unidades. Nessa ordem, estamos considerando que os lados n e $n-1$ vão formar pontas com os lados 2 e 1, respectivamente. A figura abaixo mostra um exemplo com $n = 5$. Determine o valor da soma dos ângulos interiores das n pontas da estrela.*



Exercício 40. *Pinóquio afirma que é possível formar um retângulo usando alguns triângulos, sem sobreposição, todos com os mesmos ângulos e nenhum dos quais possuindo um ângulo reto. Isso é realmente possível ou Pinóquio está mentindo?*

Exercício 41. *No triângulo $\triangle ABC$ abaixo, BP é bissetriz do ângulo B, M é o ponto médio do lado AC e AP é perpendicular a BP. Se $AB = 6$ e $BC = 10$, determine PM.*



Exercício 42. *Em um triângulo $\triangle ABC$, $AB = AC$ e $\angle BAC = 30°$, marca-se um ponto Q sobre o lado AB e um ponto P na mediana AD, de modo que $PC = PQ (Q \neq B)$. Determine $\angle PQC$.*

Respostas e Soluções

1 Exercícios Introdutórios

1. *a)F b)V c)F d)V e)F*

2. *Como* $2x + 3 = x + 11$*, temos* $x = 8$*. Além disso,* $y + 40° = 3y + 20°$ *implica que* $y = 10°$*.*

3. *a)*$x = 80°$*. b)*$x = 45°$*. c)*$x = 50°$*. d)*$x = 60°$*.*

4.

a) Como $y+70°+30° = 180°$*, temos* $y = 80°$*. Além disso,* $x + 80° + 60° = 180°$ *implica que* $x = 40°$*.*

b) Como $x + x + 30° = 180°$*, temos* $x = 75°$*. Além disso, pelo teorema do ângulo externo,* $x = 75° = 20° + y$*. Daí,* $y = 55°$*.*

5.

a) obtusângulo, pois $\angle BAC = 100°$*.*

b) acutângulo, pois $\angle BAC = 85°$*.*

c) retângulo, pois $\angle BAC = 90°$*.*

d) acutângulo (e também equilátero), pois $\angle BAC = 60°$*.*

6. *Pelo teorema do ângulo externo,* $\angle BOA = 130°-30° = 100°$*. Além disso,* $\angle COD = \angle BOA = 100°$ *, pois são ângulos opostos pelo vértice. Assim,* $x+100°+40° = 180°$*, ou seja,* $x = 40°$*.*

7. *Analisando a soma dos ângulos do triângulo* $\triangle ABD$*, temos* $\angle ADB + 20° + 90° = 180°$*, ou seja,* $\angle ADB = 70°$*. Como* AD *é paralelo a* BC*, segue que* $\angle EBC = 70°$*. Finalmente, analisando a soma dos ângulos do triângulo* $\triangle BEC$*, temos* $70° + 60° + x = 180°$*. Assim,* $x = 50°$*.*

8. *Temos:*

i) $2x - 1 = 7$*, então* $x = 4$*.*

ii) $x + y = 7$*, então* $y = 3$*.*

9.

i) Os triângulos $\triangle ABC$ *e* $\triangle EFD$*, pelo caso LLL;*

ii) Os triângulos $\triangle GHI$ *e* $\triangle JKL$*, pelo caso LAL.*

10. *Como os triângulos* $\triangle AED$ *e* $\triangle CEB$ *são congruentes com* $CE = ED$ *e* $\angle ECB = \angle EDA$*, então* $EB = AE$ *e* $CB = AD$*, ou seja,* $y = 7$ *e* $2x + 5 = 13$*. A última igualdade produz* $x = 4$*.*

11. *Temos: a) Incentro; b) Ortocentro; c) Baricentro e d) Circuncentro.*

12. *Como* $AB = BC$*, temos* $5x = 3x + 2$*, ou seja,* $x = 1$*. De* $AC = 2AD$*, segue que* $x + y = 8x$ *e consequentemente* $y = 7$*.*

13. *Temos: BM é mediana, AE é altura, CD é bissetriz e HM é mediatriz.*

14. *Se* $\angle ACB = 40°$ *e* $AC = BC$*, então* $\angle CAB = \angle CBA = 70°$*. Assim,* $\angle ABD = 180° - 70° - 90° = 20°$*.*

15. *Se* $\angle BCA = 30°$*, então* $\angle BAC = 180° - 90° - 30° = 60°$*. Assim,* $\angle ABD = 180° - 90° - 60° = 30°$*.*

2 Exercícios de Fixação

16. *Como* $\angle ACB = 30°$*, então* $\angle CAB = 60°$ *e, por consequência,* $\angle ABD = 30°$*. Assim,* $\angle DBE = 45° - \angle ABD = 15°$*.*

17. *Dividindo os ângulos internos do triângulo em dois ângulos congruentes a* α *no vértice* A*, dois congruentes a* β *no vértice* B *e dois congruentes a* γ *no vértice* C*, tem-se* $\alpha + \beta = 70°$*,* $\alpha + \gamma = 50°$*, e* $\beta + \gamma = 60°$*. Daí, resolvendo o sistema formado por essas equações,* $\alpha = 30°$*,* $\beta = 40°$ *e* $\gamma = 20°$*. Assim, temos* $\angle BAC = 60°$*,* $\angle CBA = 80°$ *e* $\angle ACB = 40°$*.*

18. *Como* $2x + 6° = 36° + x$*, temos* $x = 30°$*.*

19. *O triângulo* $\triangle ABE$ *é isósceles pois* $AB = BE$*. Seja* α *o seu ângulo da base. Pelo teorema do ângulo externo aplicado ao triângulo* $\triangle ABE$ *com respeito ao ângulo externo* $\angle EBD$*, temos* $\alpha + \alpha = \angle EBD = 60°$*. Portanto,* $\alpha = 30°$*.*

20. *Temos* $7\beta = 70°$ *e* $2\alpha = 50°$*, ou seja,* $\beta = 10°$ *e* $\alpha = 25°$*.*

21. *Pelo caso ALA,* $\triangle ODC \equiv \triangle OBE$ *e daí* $OD = OB = 5cm$*. Como o triângulo* $\triangle DOB$ *é isósceles com ângulo do vértice medindo* $60°$*, temos* $\angle ODB = \angle DBO = 60°$ *e consequentemente* $\triangle ODB$ *é equilátero. Assim,* $DB = OB = 5cm$*.*

22. *a)* $\angle ACB = 180° - 60° - 80° = 40°$*;*

b) Como BE *e* GD *são bissetrizes,* $\angle DCB = 20°$ *e* $\angle DBC = 40°$*;*

c) Analisando a soma dos ângulos do triângulo $\triangle DBC$*, temos* $\angle BDC = 180° - 40° - 20° = 120°$*.*

23. *Como* BD *e* AE *são medianas e* $AD = DE$*, tem-se* $BE = ED = AD = DC = 8cm$*.*

24. *a) LAL;*

b) LAA_o;

c) LLL;

d) ALA.

25. *Como $\triangle CDE$ é isósceles, $\angle DEC = 80° = \angle AEB$, pois são ângulos da base. Assim, como $\angle ABE$ é isósceles, $\alpha = 50°$. De forma análoga, $\beta = 40°$. Portanto, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{5}{4}$.*

26. *Como $\triangle CEF$ é equiláterio, $\angle FCD = 180° = 75° - 60° = 45°$. De forma análoga, $\angle MDC = 55°$. Assim, o ângulo determinado pela intersecção das retas MD e CF é $80°$. Portanto, $x = 180° - 60° - 80° = 40°$.*

27. *(Extraído da OBM 2011) Como $\triangle BAD$ e $\triangle AEC$ são isósceles, segue que $\angle BAD = \angle BDA$ e $\angle CAE = \angle CEA$. Tem-se ainda que $\angle BAC = \angle BAD + \angle CAE - 40° = \angle BDA + \angle CEA - 40° = (180° - 40°) - 40° = 100°$.*

28. *(Extraído da OBM 2008)*
Como $\angle ABC = 110°$, então $\angle AOC = 140°$ e com isso $\angle OAC = 20°$. Por outro lado, $\angle IAC = 10°$. Portanto, $\angle IAO = 30°$.

29. *(Extraído da OBM 2006) Pelo teorema do ângulo externo, $\angle ADE + x = 30° + \angle ABD$, portanto $\angle ADE = \angle AED = 30° + \angle ABD - x$. Além disso, $\angle AED = x + \angle ACD$. Igualando as duas equações e usando que $\angle ABC = \angle ACB$, temos $30° + \angle ABD - x = x + \angle ACD$, ou seja, $x = 15°$.*

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

30. *(Extraído da OBMEP - 2005) Como $\triangle ABC$ é isósceles, temos $\angle ABC = \angle ACB = \alpha$. Como $\triangle BCD$ é isósceles, também temos $\angle BDC = \angle DBC = \alpha$. Se $\angle DCA = \beta$, tem-se, pelo teorema do ângulo externo, que $\alpha = 30° + \beta$. Analisando a soma dos ângulos do $\triangle BCD$, $\alpha + \alpha + \alpha - \beta = 180°$. Assim, pelas duas equações tem-se $2\beta + 90° = 180°$, ou seja, $\beta = 45°$.*

31. *(Extraído da OBMEP 2008) Pelo teorema do ângulo externo e usando que o triângulo $\triangle CAD$ é isósceles, $\angle ACB = \angle CAD + \angle CDA = 2 \cdot \angle CDA = 96°$. Do mesmo modo obtém-se $\angle CBA = 2 \cdot \angle DEA$ e $\angle BAC = 2 \cdot FEA$. Somando as três igualdades,*

$$\begin{aligned} 180° &= \angle ABC + \angle BCA + \angle CAB \\ &= 96° + 2 \cdot \angle DEA + 2 \cdot \angle FEA \\ &= 96° + 2\angle DEF. \end{aligned}$$

Ou seja, $\angle DEF = 42°$.

32. *(Extraído da OBM - 2011) Sejam $\angle BAC = \alpha$ e $\angle BCA = 2\beta$, tem-se $\angle ABC = \alpha + 50°$. Pelo teorema do ângulo externo no triângulo $\triangle DEC$, $\angle AED = 90° + \beta$. Analisando a soma dos ângulos dos triângulos $\triangle ABC$, temos $\alpha + (\alpha + 50°) + 2\beta = 180°$, ou seja, $\alpha + \beta = 65°$. Finalmente, analisando a soma dos ângulos do triângulo $\triangle EAD$, temos $x + \alpha + (90 + \beta) = 180°$ e consequentemente $x = 90° - (\alpha + \beta) = 25°$.*

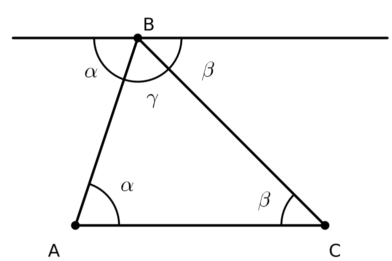
33. *(Extraído do Torneio das Cidades) Seja $\angle CAB = 2\alpha$. Assim, $\angle CBA = 90° - 2\alpha$. Os ângulos da base dos triângulos isósceles $\triangle ACN$ e $\triangle CMB$ valem $90° - \alpha$ e $45° + \alpha$, respectivamente. Assim, $\angle MCN = 180° - \angle CMN - \angle CNM = \alpha + (45° - \alpha) = 45°$.*

34. *(Extraído da AIME) Chamando a intersecção entre AF e ED de G e a intersecção de AF e BC de H, temos pelo teorema do ângulo externo que $\angle DGH = E + F$ e $\angle CHG = A + B$. Analisando a soma dos ângulos do quadrilátero $DCHG$, temos $A + B + C + D + E + F = 360$, ou seja, $n = 4$.*

35. *(Extraído da Olimpíada de Leningrado) As igualdades fornecidas implicam que os triângulos $\triangle BKC$ e $\triangle CHB$ são congruentes pelo caso LAL. Assim, temos $CK = HB$ e $BK \perp KC$. Consequentemente BK é uma altura e $\triangle ABC$ é isósceles com $AB = BC$. Além disso, $\angle HBC = \angle KCB$ implicando que $AB = AC$. Como os três lados são iguais a AB, o triângulo é equilátero.*

36. *Pelo vértice B, trace uma reta paralela ao lado AC. Tal reta forma dois pares de ângulos alternos internos de valores α e β. Como a soma dos três ângulos incidentes no vértice B é um ângulo raso, temos:*

$$\angle BAC + \angle ACB + \angle CBA = \alpha + \beta + \gamma = 180°.$$



37. *Suponha, por absurdo, que o triângulo $\triangle LNP$ é equilátero. Teremos:*

$$\frac{\angle BCA}{2} = 90° - \angle HNC = 30°.$$

Além disso,

$$\angle BMC = \angle LPN - \frac{\angle BCA}{2} = 90°.$$

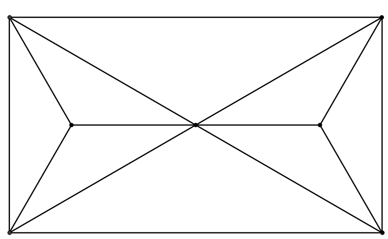
Como BM é altura e mediana, concluímos que $\triangle ABC$ é isósceles. Sendo $\angle BCA = 60°$, podemos concluir que

$\triangle ABC$ é de fato equilátero. Nesse caso, BM, CK e AH seriam concorrentes em um mesmo ponto e isso produziria um absurdo pois estamos supondo que L, M e P são distintos.

38. *Como B_1C_2 é mediana do triângulo retângulo $\triangle BB_1A$, então $B_1C_2 \equiv C_2A$ e, por consequência, $\angle AB_1C_2 = \angle B_1AC_2 = 30^\circ$ e $\angle B_1C_2A = 120^\circ$. De forma análoga, tem-se $\angle AB_2C_1 = 120^\circ$ e $\angle B_2C_1B = 120^\circ$. Seja P a intersecção entre C_1B_2 e B_1C_2. Analisando a soma dos ângulos do quadrilátero AB_2PC_2, temos $\angle C_2PB_2 = 360^\circ - 30^\circ - 120^\circ - 120^\circ = 90^\circ$, ou seja, B_1C_2 é perpendicular a C_1B_2.*

39. *(Extraído da AIME) Sejam S a soma dos ângulos nas n "pontas"e R a soma dos outros $2n$ ângulos internos dos triângulos que contêm estas "pontas". O polígono desenhado tem soma dos ângulos externos dado por 360°. Como os ângulos que compõem R são os ângulos externos do polígono contados exatamente duas vezes, temos $R = 2 \cdot 360^\circ$. A soma dos ângulos internos dos n triângulos que contém as pontas vale $180^\circ n$. Assim, $180^\circ n = S + R = S + 720^\circ$ implica que $R = 180^\circ(n-4)$.*

40. *(Extraído do Torneio das Cidades) Dessa vez Pinóquio não está mentindo. Abaixo é exibido um exemplo com 8 triângulos possuindo os ângulos 30° e 120°.*



41. *Seja Z o ponto de interseção do prolongamento de AP e BC. O triângulo $\triangle ABZ$ é isósceles, pois o segmento AP é altura e bissetriz. Logo, $BZ = AB = 6$ e consequentemente $ZC = BC - BZ = 10 - 6 = 4$. Como o triângulo $\triangle ABZ$ é isósceles, BP é altura, bissetriz e mediana. Logo P é o ponto médio de AZ. Como M já é o ponto médio de AC, PM é a base média no triângulo $\triangle AZC$, ou seja, $PM = 2$.*

42. *Como $\triangle ABC$ é isósceles e $\angle BAC = 30^\circ$, $\angle ABC = \angle ACB = 75^\circ$. Sejam $\angle PBQ = \beta$, $\angle PBC = \theta$ e E a interseção de BP com QC. Como PD é mediana e altura do $\triangle BPC$, temos $PC = PB$. Assim, os triângulos $\triangle PQB$ e $\triangle PBC$ são isósceles com ângulos das bases β e θ. Pelo teorema do ângulo externo, segue que $\angle EPQ = 2\beta$ e $\angle EPC = 2\theta$. Assim, $\angle QPC = 2\beta + 2\theta = 2\angle QBC = 150^\circ$. Finalmente, como $\triangle QPC$ também é isósceles de base PQ, segue que $\angle PQC = 15^\circ$.*

PRODUZIDO POR ARQUIMEDES CURSO DE ENSINO
CONTATO@CURSOARQUIMEDES.COM