Encontro 5: Permutação e resolução de exercícios de contagem

Relembrando:

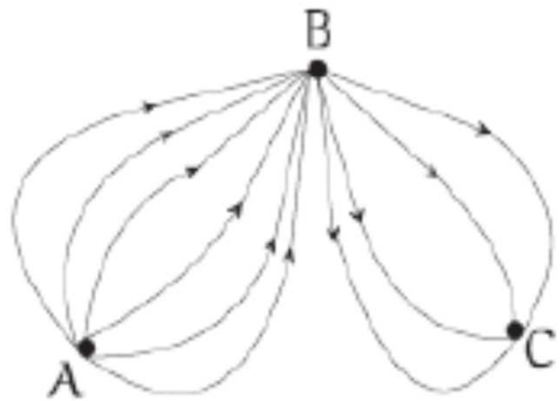
Princípio Aditivo: Sejam A e B conjuntos disjuntos, isto é, conjuntos com interseção vazia. Se A possui *m* elementos e se B possui *n* elementos, então a união $A \cup B$ possui *m+n* elementos.

De modo alternativo, este princípio também pode ser enunciado do seguinte modo.

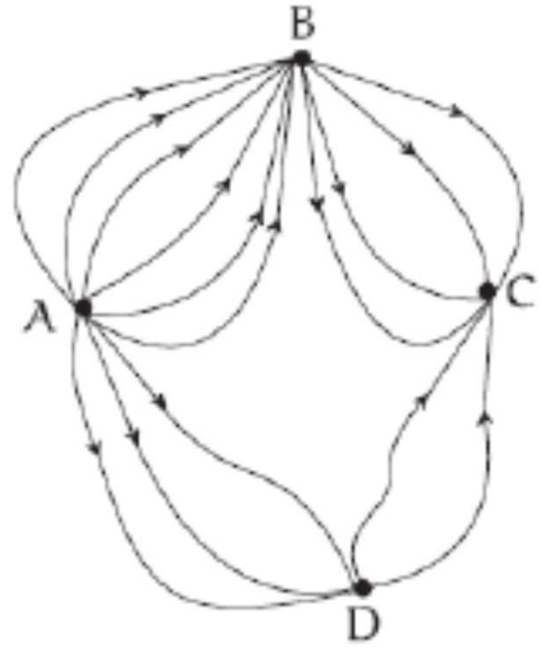
Princípio Aditivo: Suponha que um evento *X* possa ocorrer de *x* maneiras possíveis e que um evento distinto *Y* possa ocorrer de *y* maneiras possíveis. Então *X* ou *Y* pode ocorrer de *x+y* maneiras diferentes.

Princípio Multiplicativo. Se uma decisão D_1 pode ser tomada de *p* modos e, qualquer que seja esta escolha, a decisão D_2 pode ser tomada de *q* modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões D_1 e D_2 é igual ao produto *pq*.

Exercício 1: (Fomin, capítulo 2) No País das Maravilhas existem três cidades A, B e C. Existem seis estradas ligando A a B e quatro estradas ligando B a C. De quantas maneiras é possível dirigir de A



Exercício 2: (Fomin, capítulo 2) Foram construídas uma cidade nova D e diversas estradas novas no País das Maravilhas. E agora, de quantas maneiras é possível dirigir de A a C?



Resolução:

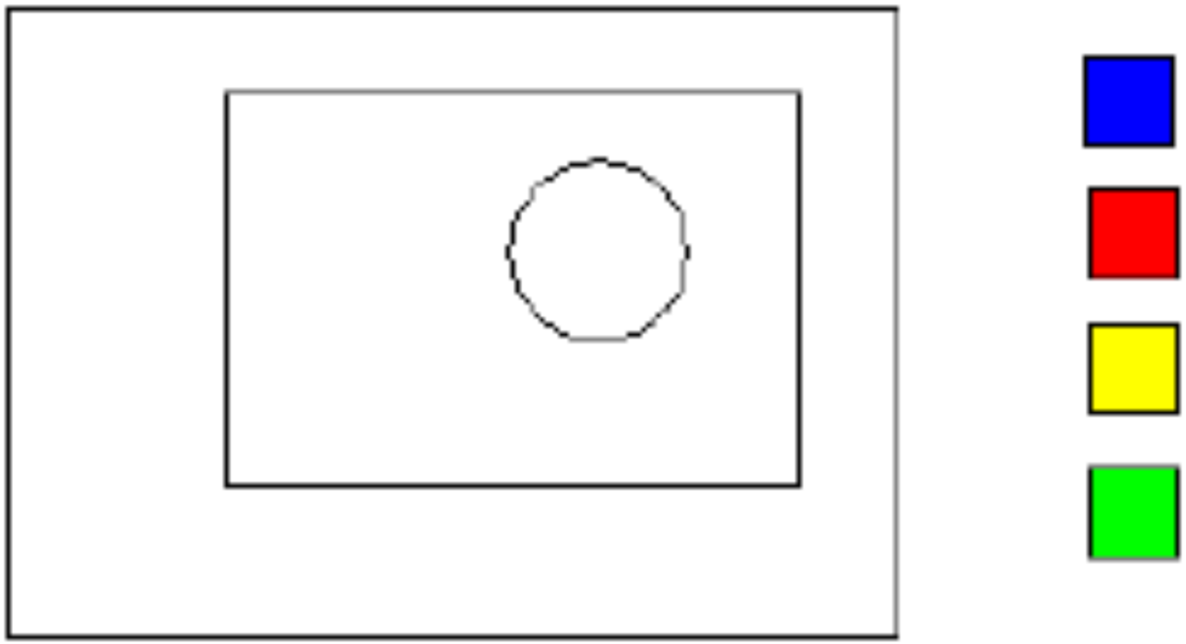
Exercício 1:
De A até B x De B até C
6 x 4 =24

Exercício 2:Como podemos utilizar os caminhos que passam por B ou por D temos que o total de rotas possíveis é:
Total = De A até B x De B até C + De A até D x De D até C

Total = 6 x 4 + 3 x 2 = 24 + 6 = 30 Caminhos possíveis

Exercício 3: Vamos chamar um número natural de “todo-ímpar” se todos os seus algarismos forem ímpares. Quantos números todo-ímpares de três algarismos existem? E quantos são os números todo-ímpares de três algarismos distintos?

Exercício 4: Quantas são as formas de pintar a bandeira a seguir utilizando 3 cores diferentes dentre 4 cores dadas?



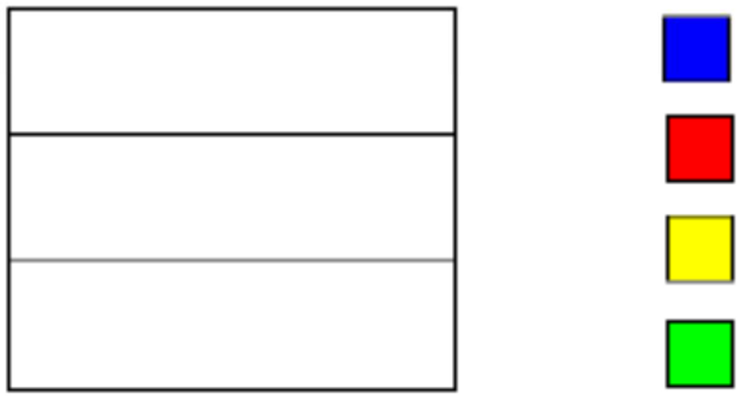
Resolução:

Exercício 3: Algarismos ímpares => 1, 3, 5, 7, 9
Números todo-ímpares de três algarismos:
Casa das centenas: 5 algarismos
Casa das dezenas: 5 algarismos
Casa das unidades: 5 algarismos
Total: 5 x 5 x 5 = 125 números “todo-ímpar”.

Números todo-ímpares de três algarismos distintos:
Casa das centenas: 5 algarismos
Casa das dezenas: 4 algarismos
Casa das unidades: 3 algarismos
Total: 5 x 4 x 3 = 60 números “todo-ímpar” distintos.

Exercício 4: Aplicação simples princípio multiplicativo:
Retângulo maior: 4 cores
Retângulo menor: 3 cores
Círculo: 2 cores
Formas de pintar a figura: 4 x 3 x 2 = 24 formas

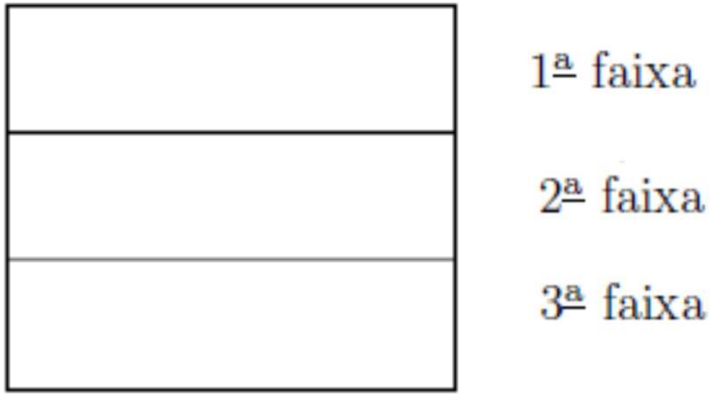
Exercício 5: (Apostila 2, exemplo 3, página 5) Para pintar a bandeira abaixo, há 4 cores disponíveis. De quantos modos ela pode ser pintada de modo que faixas adjacentes tenham cores distintas?



Exercício 6: Sobre uma mesa estão 5 livros diferentes de matemática, 7 livros diferentes de física e 10 livros diferentes de química. De quantas maneiras diferentes podemos selecionar dois destes livros, com a condição de selecionar livros de matérias diferentes?

Resolução:

Exercício 5:



$$\underset{\substack{\downarrow\\ 1^{\underline{a}}\text{ faixa}}}{4} \times \underset{\substack{\downarrow\\ 2^{\underline{a}}\text{ faixa}}}{3} \times \underset{\substack{\downarrow\\ 3^{\underline{a}}\text{ faixa}}}{3} = 36$$

Exercício 6: Na seleção dos livros, a ordem não irá importar, logo, temos as possibilidades de grupos: Livros de Matemática e Física; Livros de Matemática e Química; Livros de Física e Química. Calculando as opções de cada grupo:

Livros de Matemática e Física => 5 x 7 = 35
Livros de Matemática e Química => 5 x 10 = 50
Livros de Física e Química => 7 x 10 = 70

Total de formas: 35 + 50 + 70 = 155 formas

Exercício 7: Quantos são os números de três algarismos distintos?

Exercício 8: Quantos são os números pares de três algarismos distintos?

Exercício 9: Quantos números telefônicos, com 7 dígitos, podem ser formados se usarmos os dígitos de 0 a 9?

Exercício 10: As letras em código Morse são formadas por sequências de traços (−) e pontos (.), sendo permitidas repetições.

Por exemplo: (−,. ,−,−,. , .).

Quantas letras podem ser representadas:

(a) Usando exatamente 3 símbolos?

(b)Usando no máximo 8 símbolos?

Resolução:

Exercício 7: Vamos escolher, sucessivamente, os três algarismos, começando com o da esquerda (isto é importante, como veremos abaixo).
O primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois não pode ser igual a 0. O segundo algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois não pode ser igual ao primeiro algarismo. O terceiro algarismo pode ser escolhido de 8 modos, pois não pode ser igual nem ao primeiro nem ao segundo algarismo.
A resposta é $9 \times 9 \times 8 = 648$

Exercício 8:Números pares => o último algarismo só pode ser 0, 2, 4, 6 ou 8.
Os algarismos são distintos, logo não pode haver repetição.
Contaremos separadamente os números que terminam em 0 e os que não terminam em 0. Comecemos pelos que terminam em 0. Há 1 modo de escolher o último algarismo, 9 modos de escolher o primeiro e 8 modos de escolher o algarismo central. Há, portanto, $1 \times 9 \times 8 = 72$ números de três algarismos distintos terminados em 0.
Para os que não terminam em 0, há 4 modos de escolher o último algarismo, 8 modos de escolher o primeiro e 8 modos de escolher o algarismo central. Há $4 \times 8 \times 8 = 256$ números pares de três algarismos distintos que não terminam em 0.
A resposta é $72 + 256 = 328$.

Resolução:

Exercício 9: Cada número telefônico consiste em uma sequência de 7 dígitos do tipo:

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_6, a_7) \text{ em que } \begin{array}{l} a_1 \in A_1 = \{0, 1, 2, \ldots, 9\} \\ a_2 \in A_2 = \{0, 1, 2, \ldots, 9\} \\ \vdots \\ a_7 \in A_7 = \{0, 1, 2, \ldots, 9\} \end{array}$$

Logo, o número de seqüências é 10^7 = 10 000 000.

Exercício 10: (a) Para cada um dos três símbolos temos duas possibilidades, ou seja, $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ possibilidades.

(b) Variando a quantidade de símbolos, temos as seguintes possibilidades:

com 1 símbolo →2 possibilidades,

com 2 símbolos →2^2= 4 possibilidades,

com 3 símbolos →2^3= 8 possibilidades,

com 4 símbolos →2^4= 16 possibilidades,

com 5 símbolos →2^5= 32 possibilidades,

com 6 símbolos →2^6= 64 possibilidades,

com 7 símbolos →2^7= 128 possibilidades,

com 8 símbolos →2^8= 256 possibilidades.

Portanto, com 8 símbolos obteremos, no máximo, 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 = 510 possibilidades.

Definições

Permutação Simples: configuração dos elementos de um conjunto que formarão agrupamentos que se diferenciarão somente pela ordem.
Exemplo: As permutações simples dos elementos P, Q e R são: PQR, PRQ, QPR, QRP, RPQ, RQP.
Para determinarmos o número de agrupamentos de uma permutação simples utilizamos a seguinte expressão $P = n!$.
$n! = n*(n-1)*(n-2)*(n-3)*....*3*2*1$

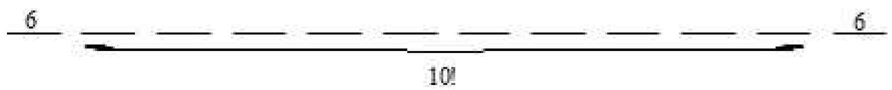
Exemplo: Quantos anagramas podemos formar com a palavra GATO?
Resolução:
Podemos variar as letras de lugar e formar vários anagramas, formulando um caso de permutação simples.
$P = 4! = 24$

Exercício 11: De quantas maneiras distintas podemos colocar em fila indiana seis homens e seis mulheres:
a) em qualquer ordem
b) iniciando com homem e terminando com mulher

Resolução:

a) em qualquer ordem
Podemos organizar as 12 pessoas de forma distinta, portanto utilizamos
12! = 12*11*10*9*8*7*6*5*4*3*2*1 = 479.001.600 possibilidades

b) iniciando com homem e terminando com mulher
Ao iniciarmos o agrupamento com homem e terminarmos com mulher teremos:
Seis homens aleatoriamente na primeira posição.
Seis mulheres aleatoriamente na última posição.



P = (6*6) * 10!
P = 36*10!
P = 130.636.800 possibilidades

Exercício 12: De quantas formas se pode dispor 4 pessoas em fila indiana?

Exercício 13: Quantos são os anagramas da palavra MATRIZ?

Exercício 14: Considerando a palavra MATRIZ, determine o número de anagramas que:

a) Começam por MA.

b) Tenham as letras M e A juntas, nessa ordem.

c) Tenham as letras M e A juntas.

Exercício 12:
Aplicando o conceito de permutação, temos:
4! = 4 x 3 x 2 x 1 = 24 formas

Exercício 13: A palavra MATRIZ tem seis letras distintas. Aplicando o conceito de permutação, temos:
6! = 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 720 anagramas

Exercício 14:
a) Começam por MA.
Para os anagramas que começam com MA, temos mais 4 opções de permutação de letras, logo:
4! = 4 x 3 x 2 x 1 = 24 anagramas começando com MA

b) Tenham as letras M e A juntas, nessa ordem.
Podemos pensar n as letras M e A juntas, nessa ordem, como um elemento único.
Logo, os anagramas corresponderiam a permutação de 5 elementos ou 5!:
5! = 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120 anagramas com as letras M e A juntas, nessa ordem.

c) Tenham as letras M e A juntas.
O raciocínio é o mesmo do item anterior, mas com um acréscimo: não é preciso que M e A estejam juntas nessa ordem. Logo, poderia ser MA ou AM. Assim a quantidade de anagramas irá dobrar, ou seja, teremos 240 anagramas.

Exercício 15: De quantas maneiras podemos ordenar 5 objetos lado a lado?

Exercício 16: De quantas maneiras Aline, Bernardo e Carolina podem formar uma fila? E se incluirmos o Daniel na fila?

Exercícios 17: De quantas maneiras 6 moças e 6 rapazes podem formar pares para uma dança?

Exercícios 18: De quantas maneiras podemos colocar 6 homens e 6 mulheres em fila alternando sempre H-M-H-M-H-...? E para n homens e n mulheres?

Resolução:

Exercício 15: Aplicando o conceito de permutação, temos:
5! = 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120 maneiras.

Exercício 16: Formar a fila com Aline, Bernardo e Carolina corresponde a permutá-los em linha reta, logo:
3! = 3 x 2 x 1 = 6 formas
Se incluirmos o Daniel na fila teremos a permutação de 4 elementos:
4! = 4 x 3 x 2 x 1 = 24 formas

Exercícios 17: Os pares devem ser feitos entre um rapaz e uma moça. O problema equivale ao de uma permutação para formar uma fila de um dos elementos (ou moças ou rapazes). Logo:
6! = 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 720 formas

Exercícios 18: Podemos pensar na ordenação proposta no problema como uma fila. Para tal, primeiramente ordenaremos as mulheres em uma fila conforme abaixo:

$$M_1 \ \_\_\_ \ M_2 \ \_\_\_ \ M_3 \ \_\_\_ \ M_4 \ \_\_\_ \ M_5 \ \_\_\_ \ M_6 \ \_\_\_$$

Podemos ordenar as mulheres nessa forma como uma permutação de 6 elementos.

Para os homens, nos espaços adjacentes ao das mulheres, podemos da mesma maneira fazer uma ordenação da mesma maneira, como uma permutação de 6 elementos.

Logo, para ordenar os pares como solicitado pelo enunciado, teremos a seguinte quantidade de maneiras:

$6! \times 6! = (6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) \times (6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 720 \times 720 = 518.400$ maneiras.

Generalizando esse problema para n homens e n mulheres teríamos, por raciocínio análogo, o seguinte resultado:

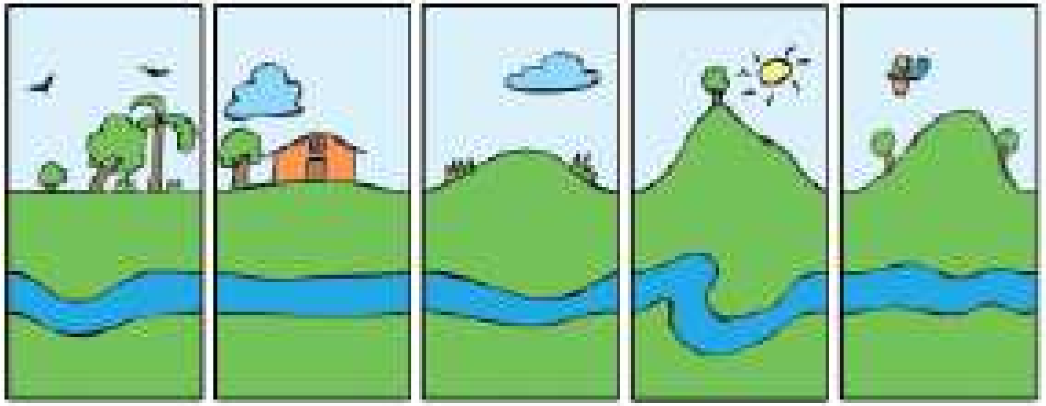
$\text{Total} = n! \times n!$

Exercício 19: (OBMEP 2012 - N2Q16 – 1ª fase) Quantos são os números naturais entre 0 e 999 nos quais aparece pelo menos um algarismo 2 e nenhum algarismo 3?

(a) 192
(b) 204
(c) 217
(d) 225
(e) 254

Exercício 19:
Podemos pensar nos números naturais entre 0 e 999 como sequências de três algarismos de 000 até 999. Estamos interessados em contar as sequências em que aparece pelo menos um algarismo 2 e nenhum algarismo 3. Para fazer essa contagem, vamos chamar de a o número de sequências em que não aparece o algarismo 3. Essas sequências se dividem em dois tipos:
aquelas em que não aparece o algarismo 2 e aquelas em que aparece pelo menos um algarismo 2; denotamos por b e c, respectivamente, o número dessas últimas sequências. Temos claramente $a = b + c$ e queremos calcular $c = a - b$; basta então calcular a e b. Mas é imediato que $a = 9 \times 9 \times 9$ (não podemos usar o 3, logo sobram 9 algarismos) e $b = 8 \times 8 \times 8$ (não podemos usar o 2 e o 3, logo sobram apenas 8 algarismos). Logo $c = 9 \times 9 \times 9 - 8 \times 8 \times 8 = 729 - 512 = 217$.

Exercício 21: (OBMEP 2011 - N2Q13 – 1ª fase) Podemos montar paisagens colocando lado a lado, em qualquer ordem, os cinco quadros da figura. Trocando a ordem dos quadros uma vez por dia, por quanto tempo, aproximadamente, é possível evitar que uma mesma paisagem se repita?



(a) Uma semana
(b) Um mês
(c) Dois meses
(d) Quatro meses
(e) Seis meses

Exercício 21:
Temos cinco posições distintas para colocarmos cinco quadros também distintos. Na primeira posição temos 5 escolhas distintas possíveis. Na segunda posição temos 4 escolhas distintas, e assim por diante. Pelo princípio multiplicativo, podemos formar $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ paisagens distintas. Como um mês tem, aproximadamente, 30 dias, podemos mudar a paisagem por aproximadamente $120/30=4$ meses.